

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

*Кафедра математической статистики*

*И.Н. Володин*

ЛЕКЦИИ  
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Казань – 2004

## Предисловие

Данное учебное пособие представляет собой почти стенографическую запись лекций, читаемых мной на факультете вычислительной математики и кибернетики Казанского университета в течении двух семестров. Студенты получают специальность “Прикладная математика”, и это обстоятельство накладывает определенный отпечаток как на содержание курса, так и на форму его изложения. В части теории вероятностей основной упор делается на математические методы построения вероятных моделей и реализацию этих методов на реальных задачах естествознания и практической деятельности. Такой подход обеспечивает неформальное отношение к использованию методов математической статистики, осознанию того, что без построения вероятностной модели не представляется возможным судить о точности и надежности статистического вывода. Именно поэтому в разделе “Математическая статистика” основное внимание уделяется методам вычисления риска конкретных статистических правил и проблемам статистических решений с минимальным риском.

В изложении вопросов условного математического ожидания и условной вероятности я ограничился рассмотрением только случаев дискретного и непрерывного распределений, поскольку студентам ВМК Казанского университета читается всего с десяток лекций по теории меры и интеграла Лебега – их даже не знакомят с теоремой Радона–Никодима. Чтобы восполнить этот пробел, я привожу формулировку этой теоремы и определяю функцию плотности через производную Радона–Никодима, но, на мой взгляд, было бы крайне наивным полагать, что большинство моих слушателей воспримут строгое современное изложение концепции условного математического ожидания.

Учебное пособие содержит 25 лекций по теории вероятностей и 15 лекций по математической статистике. Каждая лекция слишком объемна для того, чтобы ее “диктовать” студентам; лекции рассчитаны на свободное изложение материала с записью только определений и формулировок основных теорем. “Диктант” становится возможным, если вы располагаете дополнительно 7-ю лекциями.

Я приношу искреннюю благодарность Сергею Владимировичу Симушкину за помощь при оформлении лекций в электронной форме.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	2
<i>часть первая</i>	
теория вероятностей	
§1 Элементарная теория вероятностей	5
§2 Вероятностное пространство	18
§3 Условная вероятность и независимость событий	26
§4 Случайные величины и функции распределения	38
§5 Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения	45
§6 Характеристики распределения случайной величины. Классификация распределений	54
§7 Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли. Нормальное распределение	72
§8 Векторные случайные величины. Независимость.	81
§9 Моментные характеристики многомерных нормальных распределений. Мультиномиальное и многомерное нормальное распределения	91
§10 Условное распределение вероятностей. Условное математическое ожидание	99
§11 Сходимость случайных величин и функций распределений	106
§12 Характеристические функции. Теоремы единственности.	113
§13 Характеристические функции. Критерий слабой сходимости	125
§14 Предельные теоремы теории вероятностей	134
§15 Случайные процессы	142
Литература	161

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*“Пускай в данном случае вы не согласитесь мне дать гарантию, – но я ставлю вопрос шире: существует ли вообще, может ли существовать в этом мире хоть какое-нибудь обеспечение, хоть в чем-нибудь порука, – или даже сама идея гарантии неизвестна тут?”*

*В. Набоков, Приглашение на казнь*

## §1. Элементарная теория вероятностей

### Лекция 1

Во многих областях человеческой деятельности существуют ситуации, когда определенные явления могут повторяться неограниченное число раз в одинаковых условиях. Анализируя последовательно результаты таких простейших явлений, как подбрасывание монеты, игральной кости, выброс карты из колоды и т.п., мы замечаем две особенности, присущие такого рода экспериментам. Во-первых, не представляется возможным предсказать исход последующего эксперимента по результатам предыдущих, как бы ни было велико число проведенных испытаний. Во-вторых, относительная частота определенных исходов по мере роста числа испытаний стабилизируется, приближаясь к определенному пределу. Следующая таблица служит подтверждением этого замечательного факта, составляющего основу аксиоматического построения теории вероятностей как математической дисциплины.

$N \setminus n$	$10^2$	$10^4$	$10^6$
1	41	4985	499558
2	48	5004	499952
3	44	5085	500114
4	52	4946	500064
5	58	4978	500183
6	52	4985	499533
7	45	5012	500065
8	50	4931	500317
9	52	5016	500449
10	45	4973	500704
$Er$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$

Первый столбец этой таблицы указывает номер эксперимента; последующие столбцы содержат данные о количествах  $m$  выпадения герба в  $n$  ( $= 10^2, 10^4, 10^6$ ) подбрасываниях (испытаниях) правильной симметричной монеты. Таким образом, проводилось три серии экспериментов с разным числом испытаний в каждой серии. Каждая серия состоит из десяти экспериментов с одним и тем же числом  $n$  подбрасываний монеты, что

позволяет судить об изменчивости числа  $m$  выпадений герба от эксперимента к эксперименту внутри одной серии. Очевидна стабилизация относительной частоты  $p_n = m/n$  выпадений герба с ростом числа испытаний  $n$ , а также стремление  $p_n$  к величине  $p = 1/2$ . Можно даже высказать некоторое суждение об изменчивости этой частоты от эксперимента к эксперименту при фиксированном  $n$ : отклонение  $p_n$  от центра рассеивания, равного  $1/2$ , имеет порядок  $n^{-1/2}$  (см. в связи с этим нижнюю строку таблицы).

Обнаруженные закономерности, распространенные на испытания с произвольным числом исходов, позволяют построить простейшую математическую модель *случайного эксперимента*.

Построение начинается с описания множества  $\Omega$  всевозможных исходов  $\omega$ , которые могут произойти в результате каждого испытания. Множество  $\Omega$  называется *пространством элементарных исходов*, его точки (элементы)  $\omega$  – *элементарными исходами* или *элементарными событиями*. Любое подмножество  $A$  пространства  $\Omega$  (совокупность элементарных исходов  $\omega$ ) называется *событием*; пространство  $\Omega$  также является событием, но имеющим особое название *достоверного события*. Говорят, что *произошло событие*  $A$ , если в испытании наблюдается элементарный исход  $\omega \in A$ .

В этом параграфе, посвященном так называемой *элементарной теории вероятностей*, будут рассматриваться только пространства  $\Omega$ , состоящие из не более чем счетного числа элементов. Проиллюстрируем введенные понятия на ряде простейших примеров, относящихся к случайным испытаниям.

**Пример 1.1.** Подбрасывается правильная монета и регистрируется сторона (герб или решка) монеты, которая обращена к наблюдателю после ее падения. Пространство  $\Omega$  состоит из двух точек:  $\omega_1 = Г$  (выпал герб) и  $\omega_2 = Р$  (выпала решка). Любое событие  $A$  в этом примере является либо элементарным, либо достоверным.

**Пример 1.2.** Правильная монета подбрасывается два раза или, что одно и то же, подбрасываются две монеты. Пространство  $\Omega$  содержит четыре точки: ГГ, ГР, РГ, РР. Событие  $A = \{ГР, РГ\}$  означает, что монеты выпали на разные стороны, и, очевидно, не является элементарным событием. Интересно, что на раннем этапе становления теории вероятностей это событие рассматривалось как элементарное (то есть полагалось  $\Omega = \{ГГ, A, РР\}$ ), и это приводило к вероятностной модели результатов испытаний двух правильных монет, которая противоречила наблюдаемой частоте элементарных исходов.

**Пример 1.3.** Бросается игральная кость и регистрируется число выпавших очков (номер грани игральной кости). Пространство элементарных исходов состоит из шести элементов  $\omega_i = i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Пример составного события:  $A = \{2, 4, 6\}$  – выпало четное число очков.

**Пример 1.4.** Бросаются две игральные кости. Пространство элементарных исходов можно представить в виде матрицы  $\Omega = \|(i, j)\|$ ,  $i, j =$

1, ..., 6. Пример составного события: сумма очков больше 10; появление этого события возможно лишь при элементарных исходах (5,6), (6,5), (6,6).

Пример 1.5. Подбрасываются  $n$  монет. Пространство  $\Omega$  содержит  $2^n$  элементов; любой элементарный исход  $\omega$  имеет вид “слова”, состоящего из букв Г и Р, например, РГГРР ... ГРГ. Пример составного события, состоящего из  $C_n^k$  элементарных исходов: “выпало  $k$  гербов”.

Пример 1.6. Монета подбрасывается до первого появления герба. Пространство  $\Omega$  состоит из счетного числа элементов вида  $\omega_i = \text{Р} \dots \text{РГ}$ , в которых начальные Р повторяются  $i - 1$  раз,  $i = 1, 2, \dots$ . Пример составного события, осуществление которого сопряжено с появлением одного из четырех элементарных исходов, — “герб появился до пятого подбрасывания монеты”.

Пример 1.7. Наблюдатель фиксирует число метеоров, появившихся в заданном секторе небесного свода в течение фиксированного промежутка времени. Поскольку не представляется возможным ограничить сверху число возможных появлений метеоров, то естественно отождествить  $\Omega$ , с множеством всех неотрицательных целых чисел  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , то есть положить  $\omega_k = k$ . Пример составного события:  $A = \{1, 2, \dots\}$  — “наблюдался по крайней мере один метеор”.

Если ограничиться рассмотрением пространств элементарных исходов, состоящих из не более чем счетного числа элементов, то построение вероятностной модели по существу состоит в задании *распределения вероятностей* на пространстве  $\Omega$ , в соответствии с которым каждому элементарному исходу  $\omega \in \Omega$  ставится в соответствие число  $p(\omega)$ , называемое *вероятностью* элементарного события  $\omega$ . Постулируется, что  $0 \leq p(\omega) \leq 1$ , каково бы ни было  $\omega \in \Omega$ , и  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Вероятность любого составного события  $A$  вычисляется по формуле

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Число  $P(A)$  интерпретируется как относительная частота появления события  $A$  в статистическом эксперименте, состоящем из достаточно большого числа испытаний. Опираясь на эту интерпретацию, легко построить распределение вероятностей в примерах 1.1–1.6.

Если подбрасывается “правильная” (симметричная) монета (см. пример 1.1), то естественно определить вероятности элементарных исходов из условия симметрии и положить  $p(\Gamma) = p(P) = 1/2$ , что блестяще подтверждается результатами статистических экспериментов (см. таблицу 1). Однако уже при подбрасывании двух монет (пример 1.2) у части неискушенных исследователей возникает желание нарушить условие симметрии и приписать исходам ГГ и РР меньшую вероятность, чем ГР или РГ. В истории стохастики известен также парадокс, основанный на некорректном определении пространства  $\Omega$ , когда составное событие  $A = \{\Gamma P, P\Gamma\}$  трактовалось как элементарное и, следуя “аксиоме симметрии”, утверждалось, что  $p(\Gamma\Gamma) = p(P P) = p(A) = 1/3$ . Поскольку результаты опытов противоречили такой вероятностной модели (наблюдения показывали, что  $p(A) = 1/2$ ,  $p(\Gamma\Gamma) = p(P P) = 1/4$ ), то указанный феномен объявлялся парадоксом теории вероятностей, над разрешением которого бились многие известные математики и естествоиспытатели, в том числе и великий Даламбер. Все разъяснилось только после четкого математического определения *независимости* событий. Мы познакомимся с этим фундаментальным понятием теории вероятностей несколько позднее, а пока, следуя принципу симметрии, припишем каждому из четырех элементарных исходов, наблюдаемых при подбрасывании двух монет, одну и ту же вероятность  $1/4$ . Как уже говорилось выше, эта вероятностная модель согласуется с результатами наблюдений частот элементарных исходов в соответствующем статистическом эксперименте, состоящем из большого числа испытаний двух правильных монет.

Чтобы закончить с испытаниями правильных монет, обратимся сразу к примеру 1.5, где элементарный исход формируется из результатов подбрасываний  $n$  монет. В этой ситуации убедить вышеупомянутого “неискушенного исследователя” в равновероятности всех элементарных исходов практически невозможно. Например, считается, что элементарный исход ГГГ-ГГГГГГГГ имеет значительно меньшую вероятность появления, чем исход РРГРГГГРРГ (здесь  $n = 10$ ). Это чисто психологический феномен, связанный с неосознанной подменой этих двух элементарных исходов двумя составными событиями:  $A$  – все монеты выпали одной стороной (событие, состоящее из двух элементарных исходов) и  $B$  – хотя бы одна монета выпала не той стороной, что все остальные (событие, состоящее из  $2^n - 2$  исходов). По этой же причине абсолютное большинство покупателей лотерейных билетов откажутся от билета, номер которого состоит из одинаковых



цифр, хотя, очевидно, все билеты имеют одинаковый шанс быть выигрышными. В последнем легко убедиться, наблюдая, как происходит розыгрыш лотерейных билетов, то есть как обеспечивается *равновероятность* билетов вне зависимости от их номеров. Итак, в примере 1.5 вероятностная модель определяется вероятностями  $p(\omega) = 2^{-n}$ , каково бы ни было  $\omega \in \Omega$ . В соответствии с этой, подтверждаемой реальными статистическими экспериментами, моделью вероятности упомянутых событий  $A$  и  $B$  равны соответственно  $1/2^{n-1}$  и  $1 - 1/2^{n-1}$ . Например, при  $n = 10$   $P(A) = 1/512$ , а  $P(B) = 511/512$ , так что событие  $B$  происходит в 511раза чаще, чем событие  $A$ .

Принцип “симметрии” также применяется и в построении вероятностной модели испытаний правильной кости (примеры 1.3 и 1.4). Естественно, все грани имеют одинаковую вероятность выпадения, в соответствии с чем  $p(\omega) = 1/6$  в примере 1.3 и  $p(\omega) = 1/36$  в примере 1.2, каково бы ни было  $\omega \in \Omega$ . Однако не следует излишне доверять этой модели на практике, когда вам придется играть в кости с приятелем или в казино. При раскопках египетских пирамид были найдены игральные кости со смещенным центром тяжести, так что еще за тысячелетия до нашей эры находились “весьма искушенные испытатели”, способные управлять частотой элементарных исходов.

Распределение вероятностей в примере 1.6 можно получить, используя те же рассуждения, что и в примерах 1.1, 1.2 и 1.5. Действительно, осуществление элементарного исхода  $\omega_1$  означает выпадение герба в однократном подбрасывании монеты, так что (см. пример 1.1)  $p_1 = p(\omega_1) = 1/2$ . Элементарный исход  $\omega_2$  совпадает с элементарным исходом РГ в примере 1.2, следовательно,  $p_2 = p(\omega_2) = 1/4$ . Наконец, при произвольном  $n = 1, 2, \dots$ , используя вероятность элементарного исхода РР,  $\dots$ , РГ (первые  $n - 1$  испытаний закончились выпадением решки, а при  $n$ -ом испытании выпал герб) в примере 1.5, получаем  $p_n = p(\omega_n) = 2^{-n}$ . Завершив построение вероятностной модели, убедимся в справедливости равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Итак, при построении вероятностных моделей в примерах 1.1–1.6 мы существенно использовали физическую природу объектов, с которыми проводились эксперименты, – монета и кость были “правильными” (симметричными), и только это свойство позволило нам приписать одинаковые веро-

ятности всем элементарным исходам. Если подбрасывается гнутая монета, то определить вероятность  $p$  выпадения герба, используя уравнения, описывающие динамику полета вращающейся неправильной монеты и закономерности ее упругого столкновения с поверхностью, представляет собой весьма сложную и вряд ли разрешимую задачу. Следует также отметить, что если  $p$  известно, но не равно  $1/2$ , то мы не в состоянии найти распределение вероятностей в примерах 1.2 и 1.5 с многократным подбрасыванием монеты, пока не формализовано понятие независимости испытаний монеты.

Если теперь обратиться к примеру 1.7, то в свете вышесказанного становится понятным, что построение вероятностной модели численности метеоров невозможно без привлечения знаний об их распределении в околоземном пространстве, учета эффекта вращения Земли в интенсивности появления метеоров, разделения метеорных явлений на “потoki” и “спорадический фон”. Учитывая наши более чем скудные познания в теории вероятностей, следует признать, что решение этой задачи нам пока “не по зубам”. И все же, предвосхищая наши дальнейшие построения, наиболее любопытным и нетерпеливым сообщу, что после учета эффекта вращения Земли распределение метеоров в спорадическом фоне выражается формулой

$$p_k = p(\omega_k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Мы завершим этот параграф решением некоторых задач, в которых используются модели, основанные на равновероятности элементарных исходов. Все эти задачи, так или иначе, сводятся к подсчету числа элементарных исходов, влекущих некоторое событие  $A$ ; определение вероятности этого события и составляет предмет задачи.

**Задача 1.1.** Бросаются две правильные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков больше 6.

В соответствии с распределением вероятностей, полученным в примере 4, все 36 элементарных исходов имеют одинаковую вероятность  $1/36$ , так что для решения задачи достаточно подсчитать число целых решений неравенства  $x + y > 6$  или обратиться к матрице элементарных исходов  $\|\omega_{i,j}\|$ ,

выделив в ней элементы с  $i + j > 6$ , составляющие искомое событие  $A$ ,

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \mathbf{16} \\ 21 & 22 & 23 & 24 & \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ 31 & 32 & 33 & \mathbf{34} & \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ 41 & 42 & \mathbf{43} & \mathbf{44} & \mathbf{45} & \mathbf{46} \\ 51 & \mathbf{52} & \mathbf{53} & \mathbf{54} & \mathbf{55} & \mathbf{56} \\ \mathbf{61} & \mathbf{62} & \mathbf{63} & \mathbf{64} & \mathbf{65} & \mathbf{66} \end{pmatrix}$$

Число “благоприятных” для события  $A$  исходов (они выделены жирным шрифтом) равно  $(1+6)6/2=21$ , откуда  $P(A) = 21/36 = 7/12$ . Итак, если вам предложат играть в кости, где ставка идет на сумму очков больше 6 или на противоположное событие  $i + j \leq 6$ , то следует ставить на первое событие - в среднем один раз из двенадцати ставок вы будете получать дополнительный выигрыш по сравнению с вашим партнером по игре.

**Задача 1.2.** (*вероятностная задача Шевалье де Мере*). Один из создателей современной теории математической статистики Ю.Нейман утверждает, что основателями теории статистических решений следует считать тех азартных игроков, которые впервые стали рассчитывать шансы определенных ставок при игре в кости, карты и т.п., и в связи с этим излагает некоторые фрагменты из переписки Б.Паскаля с одним из таких игроков. Ниже приводится выдержка из вводного курса Ю.Неймана по теории вероятностей и математической статистике.

“В конце семнадцатого века один французский вельможа Шевалье де Мере, известный игрок в азартные игры, в частности в кости, заинтересовался возможностью вычислить математически, как следует делать ставки. Его интересовала игра, состоящая из 24 бросаний пары костей. По правилам игры ставить можно было или на появление “двойной шестерки” по крайней мере один раз в 24 бросаниях, или против этого результата.

Вычисления Шевалье де Мере привели его к заключению, что в длинном ряде игр “двойная шестерка” должна появляться (хоть один раз) более чем в пятидесяти процентах всех игр и что поэтому выгодно ставить на появление двойной шестерки. Хотя Шевалье де Мере был уверен в правильности своих вычислений, он сомневался в надежности математики и произвел очень длинный ряд опытов с бросанием костей. (Этот эмпирический метод применяется и теперь и носит название “метод Монте-Карло”). Оказалось, что частность двойной шестерки в ряду игр меньше пятидесяти процентов! Получив этот результат, де Мере рассвирепел и написал из-

вестному французскому математику Паскалю письмо, утверждающее, что математика как наука никуда не годится, и пр. Письмо это было настолько яростным и вместе с тем забавным, что попало в историю!

Паскаль рассмотрел задачу Шевалье де Мере, и ответ его гласил: если кости “правильные”, то относительная частота игр с хотя бы одной двойной шестеркой равна 0.491. Таким образом, оказалось, что математические выкладки Шевалье де Мере были ошибочны, а его эмпирический результат согласуется с теорией” (конец цитаты).

Приведем решение задачи де Мере, данное Паскалем.

Пространство элементарных событий  $\Omega$  в этой задаче состоит из  $36^{24}$  равновероятных исходов. Следовательно, для решения задачи достаточно подсчитать число элементарных исходов, влекущих событие  $A$ : двойная шестерка появилась хотя бы один раз. Однако несомненно проще подсчитать число исходов для противоположного события  $A^c$ : ни одно из бросаний двух костей не закончилось появлением двойной шестерки. Очевидно, число таких исходов равно  $35^{24}$ , откуда число исходов, благоприятствующих событию  $A$ , равно  $36^{24} - 35^{24}$  и  $P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491$ .

Можно предположить, что де Мере напрямую, не зная, по всей видимости, формулы биномиальных коэффициентов, подсчитывал, сколько элементарных исходов благоприятствует однократному появлению двойной шестерки, потом двукратному, и так далее до 24, а потом сложил эти числа. Произвести все эти действия с многозначными числами и при этом не ошибиться, вряд ли по плечу даже французскому вельможе! Из всей этой истории мы должны сделать один практически важный при решении задач вывод: переход к противоположному событию и использование очевидной формулы

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

может значительно упростить решение вероятностной задачи, связанной с комбинаторными выкладками.

## Лекция 2

**Задача 1.3.** (*гипергеометрическое распределение вероятностей*). Существует довольно большой класс задач элементарной теории вероятностей, которые можно интерпретировать в рамках так называемой *урновой схемы*: событие, вероятность которого необходимо вычислить, можно трактовать как результат случайного выбора шаров различной расцветки из

урны. Простейшая из таких урновых схем состоит в следующем. Из урны, содержащей  $M$  черных и  $N - M$  белых, шаров случайным образом отбирается  $n$  шаров. Какова вероятность, что выборка содержит  $t$  черных шаров (событие  $A$ )?

В этом эксперименте пространство элементарных событий состоит из  $C_N^n$  исходов (шары одинакового цвета не различаются), и случайность отбора означает, что элементарные исходы имеют одну и ту же вероятность  $1/C_N^n$ . Следовательно, решение задачи сводится к подсчету числа выборок из  $n$  шаров, которые содержат  $t$  черных и  $n - t$  белых. Очевидно,

$$\max(0, n - (N - M)) \leq t \leq \min(n, M), \quad (1)$$

если объем выборки  $n$  превышает число черных шаров  $M$ , то мы не сможем выбрать более чем  $M$  черных, и если  $n$  больше, чем число белых шаров  $N - M$ , то число  $t$  черных шаров в выборке не может быть меньше  $n - (N - M)$ .

Из  $M$  черных шаров выбирается  $t$  шаров того же цвета, и число всевозможных способов такого выбора равно  $C_M^t$ . Аналогично, из  $N - M$  белых шаров  $n - t$  шаров того же цвета можно выбрать  $C_{N-M}^{n-t}$  способами. Следовательно, общее число исходов, благоприятствующих событию  $A$ , равно  $C_M^t \cdot C_{N-M}^{n-t}$ , и искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_M^t C_{N-M}^{n-t}}{C_N^n}. \quad (2)$$

Говорят, что формула (2) определяет *гипергеометрическое распределение* целочисленной *случайной величины*  $X$ , принимающей значение из области (1), – вероятность  $p_t = P(X = t | N, M, n)$  равна правой части (2) при любом  $t$  из области (1) и  $\sum p_t$  по всем  $t$ , удовлетворяющим (1), равна 1.

Приведем несколько примеров на применения гипергеометрического распределения вероятностей.

1. *Выигрыш в лотерее Спортлото “6 из 49”*. В начале 70-х годов получила распространение разновидность лотереи, носящая название “спортлото”. Участник лотереи из 49 видов спорта, обозначенных просто цифрами, называет шесть. Выигрыш определяется тем, сколько наименований он угадал из шести других наименований, которые были заранее выделены комиссией. Спрашивается, какова вероятность того, что участник угадает все шесть наименований, пять наименований и т.д.

Нетрудно видеть, что это есть не что иное, как задача о гипергеометрическом распределении, где  $N = 49$ ,  $M = 6$  (угадываемые номера – черные шары),  $n = 6$  и  $m (= 1, \dots, 6)$  – число угаданных номеров. Вероятность угадать  $m$  номеров равна

$$P(X = m | 49, 6, 6) = \frac{C_6^m C_{43}^{6-m}}{C_{49}^6}.$$

Например, вероятность максимального выигрыша ( $m = 6$ ) равна

$$C_6^6 C_{43}^0 / C_{49}^6 = 1 / C_{49}^6 = 6!43! / 49! \approx 7.2 \cdot 10^{-8}.$$

Это меньше одной десятиллионной(!) – шансы на выигрыш ничтожны.

2. Как вытащить “счастливый” билет на экзамене? Группа из  $N$  студентов сдает экзамен, на котором каждому студенту предлагается выбрать наугад один из  $N$  билетов. Студент Петров знает  $M (< N)$  билетов, и считает, что если он пойдет сдавать экзамен первым, то шансов “вытянуть” счастливый билет у него несомненно больше, чем если он пойдет отвечать последним (его доводы в пользу этого – “все счастливые билеты будут разобраны”). Прав ли Петров?

Если Петров пойдет первым, то вероятность выбора счастливого билета равна, очевидно,  $M/N$ . Если же Петров идет последним, то мы можем при расчете вероятности воспользоваться гипергеометрическим распределением  $P(X = M - 1 | N, M, N - 1)$  – предшествующие Петрову  $N - 1$  студентов (объем выборки  $n = N - 1$ ) должны выбрать ровно  $m = M - 1$  счастливых билетов, и тогда Петрову, который сдает последним, достанется счастливый билет. Имеем

$$P(X = M - 1 | N, M, N - 1) = \frac{C_M^{M-1} C_{N-M}^{(N-1)-(M-1)}}{C_N^{N-1}} = \frac{C_M^{M-1}}{C_N^{N-1}} = \frac{M}{N},$$

так что шансы выбрать счастливый билет одинаковы. Нетрудно, производя аналогичные выкладки, убедиться, что шансы выбрать счастливый билет вообще не зависят от того, каким по счету придет Петров на экзамен, – они всегда одни и те же  $M/N$ .

3. Оценка численности замкнутой популяции животных (метод максимального правдоподобия). Предыдущие два примера иллюстрировали применение вероятностной модели гипергеометрического распределения к решению, так называемых, *прямых* задач теории вероятностей: зная *параметры* модели  $N$ ,  $M$  и  $n$ , мы определяли вероятности событий, связанных

со значениями случайной величины  $X$ . Но в естественных науках (физика, биология, экономика и пр.) обычно приходится решать *обратные* задачи – наблюдая значения случайной величины  $X$ , исследователь стремится сделать определенное заключение о неизвестных параметрах вероятностной модели. Решением таких обратных задач занимается родственная теории вероятностей наука *математическая статистика*. Следующий пример иллюстрирует один из типичных методов решения задачи по оценке параметра вероятностной модели.

Проблема состоит в определении численности  $N$  рыб, живущих на момент наблюдения в замкнутом водоеме, скажем, в пруду рыбоводного хозяйства. Для определения (точнее, приближенной оценки)  $N$  исследователь отлавливает заданное количество  $M$  рыб, метит их каким-либо способом и возвращает в пруд. По истечении некоторого промежутка времени, когда, по его мнению, меченые рыбы “перемешались” с другими обитателями пруда, он снова отлавливает фиксированное количество  $n$  рыб (в математической статистике эта процедура называется извлечением выборки объема  $n$  из генеральной совокупности) и подсчитывает число  $m$  отмеченных рыб, попавших во второй улов. В рамках гипергеометрической модели такого эксперимента мы располагаем значениями параметров  $M$  и  $n$ , знаем результат  $m$  наблюдения случайной величины  $X$ , но не знаем значения параметра  $N$  гипергеометрического распределения  $P(X = m|N, M, n)$ .

Один из основных методов решения обратных задач теории вероятностей (задач математической статистики), который называется *методом максимального правдоподобия*, состоит в выборе такого значения  $\hat{N}$  параметра  $N$ , которое соответствует максимуму вероятности наблюдаемого исхода  $m$  в наблюдении  $X$ . Основной довод в пользу такого поведения статистика состоит в простом житейском наблюдении: если происходит какое-либо событие, то это событие должно иметь большую вероятность по сравнению с другими исходами статистического эксперимента.

Итак, метод максимального правдоподобия предлагает в качестве оценки неизвестного значения  $N$  (численности рыб в пруду) взять решения следующей задачи на экстремум:

$$\hat{N} = \arg \max_N \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Решить эту задачу можно с помощью определения значения  $N$ , при ко-

тором происходит смена неравенства

$$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} < \frac{C_M^m C_{N+1-M}^{n-m}}{C_{N+1}^n}$$

на обратное. Используя известную формулу для вычисления биномиальных коэффициентов, находим, что это неравенство эквивалентно  $(N + 1)t < nM$ , откуда получаем оценку максимального правдоподобия для численности рыб в пруду:

$$\hat{N} = \left[ n \frac{M}{m} \right].$$

Легко заметить, что такая оценка согласуется с простыми рассуждениями типа, “если при повторном отлове я обнаружил половину отмеченных рыб, то в пруду их в два раза больше, чем я поймал”.

**Задача 1.4. Геометрические вероятности: задача о встрече.** Два человека договорились встретиться в течение определенного часа. Предлагается, что момент прихода каждого из встречающихся не зависит от намерений другого и имеет “равномерное” распределение в назначенном промежутке встречи 60 минут (момент прихода случаен). Пришедший первым ждет другого только 10 минут, после чего уходит (встреча не состоялась). Какова вероятность встречи?

Это одна из типичных задач *геометрической вероятности*, для решения которой используется следующая математическая формализация понятия “случайности” момента прихода. Рассмотрим более общую (и более абстрактную) задачу. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  выделяется замкнутая область  $\Omega$  конечной лебеговой меры  $\mu(\Omega)$ . На область  $\Omega$  случайно бросается точка, и требуется определить вероятность того, что точка попадет в подмножество  $S \subset \Omega$ . Естественно формализовать понятие “случайности” в терминах независимости вероятности попадания точки в  $S$  от положения этого множества в области  $\Omega$  и его конфигурации, и постулировать, что искомая вероятность пропорциональна  $\mu(S)$ . В таком случае  $\Omega$  играет роль пространства элементарных исходов, вероятность попадания точки в  $\Omega$  должна равняться единице, так что вероятность попадания в множество  $S$  равна  $P(S) = \mu(S)/\mu(\Omega)$ .

Используем этот метод в решении задачи о встрече. Здесь  $\Omega$  – квадрат  $60 \times 60$ , множество  $S$  – полоса вдоль диагонали квадрата, которую в декартовой системе координат можно задать в виде области  $|x - y| \leq 10$ .




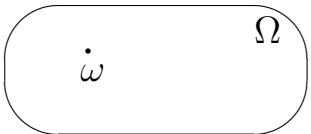
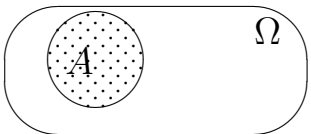
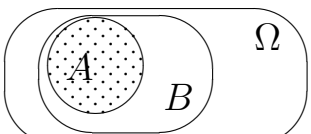
Очевидно, площадь этой области равна  $60 \cdot 60 - 50 \cdot 50$ , площадь квадрата –  $60 \cdot 60$ , откуда искомая вероятность встречи, равная отношению площадей,  $P(S) = 1 - (50/60)^2 = 11/36$ .

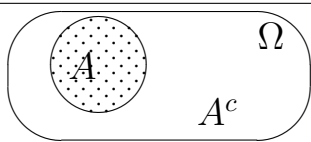
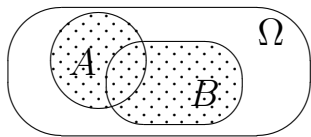
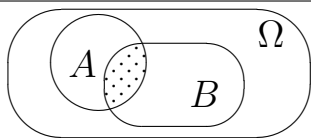
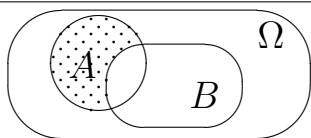
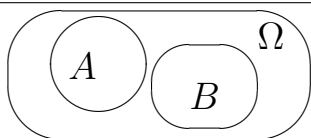
Основной вывод, который мы должны сделать из решения данной задачи, состоит в осознании невозможности определения вероятности на несчетных пространствах  $\Omega$  посредством задания функции  $p(\omega)$ , как вероятности элементарного исхода  $\omega \in \Omega$ . Распределение вероятностей следует определять с помощью функций на подмножествах  $\Omega$ , причем эти функции должны быть *нормированными мерами* – вероятность всего  $\Omega$  должна равняться единице, и  $P(S)$  должна обладать свойством счетной аддитивности.

## §2. Вероятностное пространство

Аксиоматическое построение теории вероятностей начинается с формализации (описания) *пространства  $\Omega$  элементарных исходов  $\omega$*  некоторого статистического эксперимента. Определенные (см. ниже) подмножества пространства  $\Omega$  называются *событиями*; говорят, что произошло событие  $A (\subset \Omega)$ , если статистический эксперимент закончился элементарным исходом  $\omega \in A$ . Над событиями  $A$ , как подмножествами пространства  $\Omega$ , вводятся теоретико-множественные операции, вероятностная трактовка которых приводится в следующей таблице.

Пробуем ввести графики посредством самого TeXa и его псевдографики

Теоретико-множественные объекты и операции	Вероятностная трактовка	Геометрическая интерпретация
$\Omega$ – множество	пространство элементарных исходов, <i>достоверное событие</i>	
$\omega$ – элемент $\Omega$	элементарный исход эксперимента, <i>элементарное событие</i>	
$A$ – подмножество множества $\Omega$	событие	
$\emptyset$ – пустое множество	<i>невозможное событие</i>	
$A \subset B$ – подмножество $A$ есть часть (принадлежит) $B$	событие $A$ <i>влечет</i> событие $B$	

$A^c$ – дополнение подмножества $A$ до $\Omega$	событие $A$ не произошло	
$A \cup B$ – объединение подмножеств $A$ и $B$	Произошло по крайней мере одно из событий $A$ или $B$	
$A \cap B$ – пересечение подмножеств $A$ и $B$	Произошли одновременно оба события $A$ и $B$	
$A \setminus B$ – разность: из подмножества $A$ вычитается подмножество $B$	Произошло событие $A$ , в то время как событие $B$ не произошло	
$A \cap B = \emptyset$ – множества $A$ и $B$ не имеют общих точек (не пересекаются)	события $A$ и $B$ <i>несовместны</i>	

Если рассматривать введенные операции над множествами как алгебраические, то  $\Omega$  выступает в роли “единицы” алгебры, а  $\emptyset$  – в роли ее “нуля”, что видно из следующих равенств:

$$\begin{aligned}
 A \subset \Omega, \quad \Omega^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = \Omega, \quad (A^c)^c = A; \\
 A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cup A^c = \Omega; \\
 A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cap A^c = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Операции объединения и пересечения распространяются на любое, возможно несчетное семейство  $\{A_i, i \in I\}$  событий:

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i \in I} A_i & \quad - \text{ произошло по крайней мере одно из событий семейства } \{A_i, i \in I\}, \\
 \bigcap_{i \in I} A_i & \quad - \text{ произошли одновременно все события семейства } \{A_i, i \in I\}.
 \end{aligned}$$

**Определение 2.1.** Семейство событий  $\{A_i, i \in I\}$  называется семейством *несовместных событий*, если  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при любых  $i \neq j, i, j \in I$ .

Если  $A_i, i \in I$ , несовместны, то вместо знака  $\bigcup$  используется знак “прямой суммы”  $\sum$  (или  $+$ ):

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I} A_i, \quad A \cup B = A + B.$$

Имеет место *правило двойственности*:

$$\left(\bigcup_I A_i\right)^c = \bigcap_I A_i^c, \quad \left(\bigcap_I A_i\right)^c = \bigcup_I A_i^c.$$

Напомним, что операции объединения и пересечения обладают свойствами коммутативности  $A \cup B = B \cup A$ , ассоциативности  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  и дистрибутивности  $B \cap (\cup_I A_i) = \cup_I (A_i \cap B)$ . Отношение принадлежности  $A \subset B$  порождает частичный порядок на подмножествах пространства  $\Omega$ , так что отношение эквивалентности (равенства)  $A = B$  двух событий означает, что одновременно  $A \subset B$  и  $B \subset A$ . Введенные выше операции над множествами определяют структуру булевой алгебры: имеет место

**Определение 2.2.** *Булевой алгеброй* называется такой класс  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$ , что

- (A1)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- (A2)  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ ,
- (A3)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$ .

### Лекция 3

**Предложение 2.1.** *Если  $\mathcal{A}$  – булева алгебра, то*

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (2)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_1^n A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_1^n A_i \in \mathcal{A}$ ,
- (3)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

*Доказательство.* (1) Так как  $\emptyset = \Omega^c$ , то в силу (A1) и (A2)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .

(2) Используя метод индукции, легко показать, что для любого  $n = 1, 2, \dots$  включение  $\{A_i, i = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{A}$  влечет  $\bigcup_1^n A_i \in \mathcal{A}$  ( $n - 1$  раз используется аксиома (A3) булевой алгебры). С другой стороны, из правила двойственности вытекает, что  $\{A_i, i = \overline{1, n}\} \subset \mathcal{A} \implies \bigcap_1^n A_i \in \mathcal{A}$ , ибо  $\{A_i^c, i = \overline{1, n}\} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_1^n A_i^c = (\bigcap_1^n A_i)^c \in \mathcal{A} \implies \bigcap_1^n A_i = [(\bigcap_1^n A_i)^c]^c \in \mathcal{A}$ .

(3) Это свойство немедленно следует из очевидного равенства  $A \setminus B = A \cap B^c$  (разность множеств означает, что  $\omega$  одновременно принадлежит дополнению множества  $B$  и множеству  $A$ ).

Таким образом, булева алгебра содержит “единицу”  $\Omega$ , “ноль”  $\emptyset$  и замкнута относительно конечного числа операций объединения, пересечения и вычитания (взятия дополнения).

Примеры булевых алгебр. **1.** Самая “тонкая” булева алгебра: множество  $\mathcal{P}(\Omega)$  всевозможных подмножеств пространства  $\Omega$ , включая пустое множество  $\emptyset$ , как подмножество любого  $A \in \Omega$ . **2.** Самая “грубая” булева алгебра  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ . **3.** Булева алгебра, порожденная событием  $A$ :  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ .

**Определение 2.3.** Вероятностью  $P$  на булевой алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$  называется отображение  $\mathcal{A}$  в отрезок  $[0; 1]$ , обладающее следующими свойствами:

(P1) *нормируемость*:  $P(\Omega) = 1$ ;

(P2) *конечная аддитивность*: если события  $A_1, \dots, A_n$  несовместны, то

$$P\left(\sum_1^n A_i\right) = \sum_1^n P(A_i);$$

(P3) *непрерывность*: если  $\{A_n, n \geq 1\}$  – монотонно убывающая по включению последовательность элементов из  $\mathcal{A}$  и  $\bigcap_1^\infty A_n = \emptyset$  (в этом случае пишут  $A_n \downarrow \emptyset$ , когда  $n \rightarrow \infty$ ), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

В следующем предложении предполагается, что все события принадлежат булевой алгебре  $\mathcal{A}$ .

**Предложение 2.2.** Вероятность  $P$  на булевой алгебре  $\mathcal{A}$  обладает следующими свойствами:

(1)  $P(\emptyset) = 0$ ;

(2)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ ;

(3) если  $A \subset B$ , то  $P(A) \leq P(B)$  (свойство монотонности) и

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ;

(4)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  (свойство сильной аддитивности);

(5)  $P\left(\bigcup_1^n A_i\right) \leq \sum_1^n P(A_i)$  (свойство полуаддитивности);

(6) если  $A_n \downarrow A$  или  $A_n \uparrow A$ , то справедливо свойство непрерывности относительно монотонной сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A);$$

(7) если  $\{A_n, n \geq 1\}$  – бесконечная последовательность несовместных событий, то имеет место свойство  $\sigma$ -аддитивности

$$P\left(\sum_1^{\infty} A_n\right) = \sum_1^{\infty} P(A_n);$$

$$(8) P\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) \leq \sum_1^{\infty} P(A_n) \text{ (свойство } \sigma\text{-полуаддитивности.)}$$

Доказательство. (1) Используя в нужном месте аксиомы (P2) и (P1), получаем  $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$ , откуда  $P(\emptyset) = 0$ .

(2) Используя аксиому аддитивности (P2), имеем  $1 = P(\Omega) = P(A + A^c) = P(A) + P(A^c)$ , откуда  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

(3) Так как  $B = A + (B \setminus A)$ , то, в силу (P2),  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ , откуда  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ . Поскольку  $P(B \setminus A) \geq 0$ , то из последнего равенства вытекает свойство монотонности  $P(A) \leq P(B)$ .

(4) Легко видеть, что  $A \cup B = A + (B \setminus (A \cap B))$ , и поскольку  $A \cap B \subset B$ , то в силу аксиомы аддитивности и доказанного свойства (3) монотонности вероятности получаем  $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

(5) Доказательство проведем по индукции. При  $n = 2$  из доказанного свойства (4) сильной аддитивности и положительности вероятности вытекает, что  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$ . Теперь, полагая, что доказываемое неравенство имеет место для некоторого целого  $n$ , убеждаемся, что оно справедливо для  $n + 1$ , используя представление

$$\bigcup_1^{n+1} A_i = \left(\bigcup_1^n A_i\right) \cup A_{n+1}.$$

(6) Если  $A_n \downarrow A$ , то  $A_n \setminus A \downarrow \emptyset$ , и требуемое свойство вытекает из представления  $A_n = A + (A_n \setminus A)$  и аксиом аддитивности (P2) и непрерывности (P3) вероятности  $P$ . Случай  $A_n \uparrow A$  рассматривается аналогично и при этом используется представление  $A = A_n + (A \setminus A_n)$ .

(7) Свойство  $\sigma$ -аддитивности вытекает из доказанного свойства (6) и свойства (P2) конечной аддитивности:

$$P\left(\sum_1^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \sum_1^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_1^n A_k\right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n P(A_k) = \sum_1^\infty P(A_k).$$

(8) Используя, как и в (7), свойство (6), а также свойство полуаддитивности (5), получаем

$$P\left(\bigcup_1^\infty A_k\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \bigcup_1^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_1^n A_k\right) \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n P(A_k) = \sum_1^\infty P(A_k).$$

Из доказанных свойств вероятности следует обратить особое внимание на свойство (7)  $\sigma$ -аддитивности. Дело в том, что это свойство часто кладется в основу определения вероятности вместо аксиом (P2) и (P3). Имеет место

**Определение 2.4.** Вероятностью  $P$  на булевой алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$  называется такое отображение  $\mathcal{A}$  в отрезок  $[0; 1]$ , что

(P1) (нормируемость)  $P(\Omega) = 1$ ,

(P2') ( $\sigma$ -аддитивность) если объединение  $\sum_1^\infty A_n$  счетного семейства  $\{A_n, n \geq 1\}$  несовместных событий принадлежит булевой алгебре  $\mathcal{A}$ , то

$$P\left(\sum_1^\infty A_n\right) = \sum_1^\infty P(A_n).$$

Имеет место

**Предложение 2.3.** Определения 2.3 и 2.4 вероятности  $P$  на булевой алгебре  $\mathcal{A}$  эквивалентны.

*Доказательство.* То, что (P2) и (P3) влечет (P2') было установлено в утверждении (7) предложения 2.2. Докажем обратное –  $\sigma$ -аддитивность влечет непрерывность  $P$ .

Пусть  $A_n \downarrow \emptyset$ ; требуется доказать, что  $P(A_n) \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ . Представим  $A_n$  в виде объединения последовательности несовместных событий:

$$A_n = \sum_{k=n}^\infty (A_k \setminus A_{k+1}).$$

В силу аксиомы  $\sigma$ -аддитивности

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1}).$$

Правая часть этого равенства представляет остаточный член сходящегося ряда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1}),$$

поскольку из включения  $A_{k+1} \subset A_k$  (последовательность  $\{A_n, n \geq 1\}$  – монотонно убывающая) следует

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} [P(A_k) - P(A_{k+1})] = P(A_1) \leq 1.$$

Итак, ряд сходится и, следовательно, его остаточный член  $P(A_n) \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ .

Определение 2.4 постулирует, что  $P$  есть нормированная счетно аддитивная мера на булевой алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств (событий) пространства элементарных исходов  $\Omega$ . Поскольку нам придется довольно часто вычислять вероятности объединений бесконечного числа событий, а такие объединения не обязательно принадлежат  $\mathcal{A}$ , то естественно, как это принято в теории меры, расширить булеву алгебру  $\mathcal{A}$ , включив в нее пределы монотонных последовательностей ее элементов, после чего продолжить вероятность  $P$  на расширенный таким образом класс подмножеств  $\Omega$ .

**Определение 2.5.** Совокупность  $\mathcal{A}$  подмножеств пространства  $\Omega$  называется *булевой  $\sigma$ -алгеброй*, если

- (A1)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- (A2)  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ ,
- (A3)<sub>S</sub>  $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_1^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Используя правило двойственности по аналогии с доказательством предложения 2.1, легко убедиться, что булева  $\sigma$ -алгебра замкнута не только относительно объединения счетного числа своих элементов, но и относительно их пересечения.

Всегда существует хотя бы одна  $\sigma$ -алгебра подмножеств любого пространства  $\Omega$ , например, таковой является совокупность  $\mathcal{P}(\Omega)$  всевозможных подмножеств  $\Omega$ , включая  $\emptyset$  (самая “тонкая” булева алгебра – см. при-



мер 1). Вспоминая наши рассуждения о пополнении булевой алгебры пределами монотонных (по включению) последовательностей ее элементов, введем

**Определение 2.6.** Наименьшая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ , содержащая булеву алгебру  $\mathcal{A}$ , называется  $\sigma$ -алгеброй, порожденной булевой алгеброй  $\mathcal{A}$ .

Из курса анализа вам хорошо известна знаменитая теорема о продолжении меры. В терминах вероятностной меры она формулируется следующим образом

**Теорема (о продолжении вероятности).** Любая вероятность  $P$ , заданная на булевой алгебре  $\mathcal{A}$ , имеет единственное продолжение на порожденную  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ .

**Определение 2.7.** Пара  $(\Omega, \mathcal{A})$ , состоящая из пространства элементарных исходов  $\Omega$  и булевой  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$  его подмножеств, называется *измеримым пространством*. Только элементы  $\mathcal{A}$  называются *событиями*, остальные подмножества  $\Omega$ , не принадлежащие  $\mathcal{A}$ , называются *неизмеримыми подмножествами*. Наконец, триплет  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , в котором  $P$  – вероятность на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , называется *вероятностным пространством*.

### §3. Условная вероятность и независимость событий

#### Лекция 4

Понятие вероятностного пространства играет фундаментальную роль в приложениях теории вероятностей, поскольку это – математическая формализация вероятностной модели. Зная распределение вероятностей, мы в состоянии оптимизировать свое поведение при “игре” с природой, производя “ставки” на те события из сигма-алгебры  $\mathcal{A}$ , которые обладают наибольшей вероятностью. Дальнейшая оптимизация такой игры обычно осуществляется за счет дополнительной информации, которой может располагать игрок, и учет такой информации осуществляется в терминах так называемой *условной вероятности*. Чтобы уяснить смысл этого нового для нас понятия, рассмотрим следующий простой пример.

Бросается правильная кость и нас интересует событие  $A$  : выпало 6 очков. Априори вероятность этого события равна  $1/6$ , но пусть мы располагаем дополнительной информацией, что выпало четное количество очков (событие  $B$ ). В таком случае вероятность события  $A$  должна увеличиться, и для ее пересчета мы должны рассмотреть суженное пространство элементарных исходов  $\Omega_B = \{2, 4, 6\}$ . В соответствии с распределением вероятностей на исходном пространстве элементарных исходов  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  вероятность  $P(B)$  события  $B$  (или, что то же, вероятностная мера нового пространства элементарных исходов  $\Omega_B$ ) равна  $1/2$ . Условие “произошло событие  $B$ ” делает пространство элементарных исходов  $\Omega_B$  достоверным событием, и, следовательно, мы должны приписать ему вероятность единица, а вероятности  $p(2) = p(4) = p(6) = 1/6$  остальных исходов из  $\Omega_B$  пронормировать – разделить на меру  $P(B) = P(\Omega_B) = 1/2$ . Таким образом, *условное распределение* на  $\Omega_B$  следует вычислять по формуле  $p(\omega \cap B) = P(\{\omega\} \cap B)/P(B)$ . Итак, искомая вероятность события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , (условная вероятность) равна  $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B)$ .

**Определение 3.1.** *Условная вероятность события  $A$  относительно события  $B$  (более длинная и устаревшая терминология – вероятность  $A$  при условии, что произошло  $B$ ) определяется формулой*

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

если  $P(B) \neq 0$ .

Последнее условие, касающееся вероятности события  $B$ , является весьма важным в данном определении условной вероятности, и мы пока не располагаем техническими возможностями для определения условной вероятности относительно события с нулевой вероятностью его осуществления. Становление теории вероятностей как математической дисциплины во многом было связано с попыткой дать корректное определение условной вероятности относительно любого элемента  $\sigma$ -алгебры, и именно это удалось сделать Андрею Николаевичу Колмогорову в 20-х годах XX столетия, что привело к исключительно бурному развитию стохастических дисциплин и расширению области их применения.

Введем теперь одно из важнейших понятий теории вероятностей, которое, по существу, выделяет ее в самостоятельную дисциплину из общей теории меры. Если оказывается, что условная вероятность события  $A$  относительно события  $B$  равна безусловной вероятности события  $A$ , то есть  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)$ , то естественно сказать, что  $A$  *не зависит* от  $B$ . Оказывается, что в таком случае и  $B$  не зависит от  $A$ , то есть события  $A$  и  $B$  взаимно независимы, поскольку  $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = P(A)P(B)/P(A) = P(B)$  и, в силу независимости  $A$  от  $B$  (см. предыдущее равенство),  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Итак, мы пришли к следующему определению взаимной независимости событий.

**Определение 3.2.** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Легко понять, что несовместные события зависимы. Действительно, справедливо

**Предложение 3.1.** Если  $A, B$  – несовместные события, причем  $P(A) > 0$  и  $P(B) > 0$ , то  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  (события  $A$  и  $B$  зависимы).

**Доказательство.** Для несовместных событий вероятность их одновременного появления  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ , и, в то же время, в силу ненулевой вероятности появления каждого из событий,  $P(A)P(B) \neq 0$ .

Приведем пример независимых событий.

**Пример 3.1.** Обратимся к эксперименту с двукратным подбрасыванием правильной монеты (см. пример 1.2), в котором пространство элементарных исходов  $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma P, P\Gamma, PP\}$  наделяется равномерным распределением

вероятностей:  $p(\omega) = 1/4$  при любом  $\omega \in \Omega$ . Покажем, что выпадение герба при втором подбрасывании не зависит от того, что герб выпал при первом бросании монеты. Рассмотрим два события:  $A = \{\Gamma\Gamma, \Gamma P\}$  – при первом бросании появляется герб и  $B = \{\Gamma\Gamma, P\Gamma\}$  – второе испытание монеты закончилось выпадением герба, и покажем, что эти события независимы. Действительно,  $P(A) = 1/2$ ,  $P(B) = 1/2$ ,  $P(A \cap B) = P(\Gamma\Gamma) = 1/4 = P(A)P(B)$ .

Распространим теперь понятие независимости на совокупности событий.

**Определение 3.3.** События семейства  $\mathcal{C} = \{A_i, i \in I\}$  называются *независимыми в совокупности* или *совместно независимыми*, если

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}),$$

каков бы ни был конечный набор событий  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ ,  $k \geq 2$ , из совокупности  $\mathcal{C}$ .

Покажем, что *попарная* независимость событий:  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ , если  $i \neq j$ , не влечет, вообще говоря, совместную независимость событий  $A_1, \dots, A_n$ .

**Пример 3.2 (Пирамидка Бернштейна).** Правильная четырехгранная пирамида, которая при бросании с одинаковой вероятностью, равной  $1/4$ , падает на любую из четырех граней, раскрашивается в три цвета. Одна грань покрывается красным цветом (элементарный исход  $\omega_1=к$ ), другая – зеленым ( $\omega_2=з$ ), третья – синим ( $\omega_3=с$ ), а четвертая ( $\omega_4=м$ ) делится на три части, каждая из которых закрашивается своим цветом – красным, зеленым и синим.

Рассмотрим три события:  $A = \{к, м\}$  – пирамида упала гранью, содержащей красный цвет;  $B = \{з, м\}$  – зеленый цвет;  $C = \{с, м\}$  – синий цвет. Каждое из этих событий содержит по два равновероятных исхода, поэтому  $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ . Если эти события независимы, то, согласно определению 3.3, должно выполняться равенство  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 1/8$ . Однако в нашем случае одновременное осуществление всех трех событий возможно лишь при появлении единственного элементарного исхода  $\omega_4 = м$ , так что  $P(A \cap B \cap C) = p(м) = 1/4 \neq 1/8$ . Итак, события  $A$ ,  $B$  и  $C$  зависимы.

В то же время события  $A$ ,  $B$  и  $C$  попарно независимы. Действительно,  $P(A \cap B) = p(m) = 1/4 = P(A)P(B)$ , и точно такие же равенства справедливы для остальных пар событий.

Распространим теперь понятие независимости на классы событий. Фиксируем некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  и введем

**Определение 3.4.** Булевы подалгебры (или  $\sigma$ -подалгебры)  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  булевой  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$  называются *независимыми в совокупности*, если для *любого* набора событий  $A_1, \dots, A_n$  из соответствующих алгебр выполняется равенство

$$P\left(\bigcap_1^n A_i\right) = \prod_1^n P(A_i). \quad (1)$$

Заметим, что в случае булевых подалгебр формула (1), определяющая их независимость, содержит события, взятые одновременно из *всех* алгебр, – не рассматриваются всевозможные различные наборы подалгебр. Такие наборы в (1) получаются автоматически, если некоторые из  $A_i = \Omega$ , а достоверное событие  $\Omega$  принадлежит всем подалгебрам  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$ .

**Пример 3.3 (независимых булевых подалгебр).** Определение независимости булевых алгебр позволяет дать строгое математическое обоснование независимости результата очередного испытания правильной монеты от того, какими исходами закончились предыдущие испытания, или от того, что будет в будущем. Рассмотрим, как и в примере 1.5, статистический эксперимент, в котором регистрируются результаты  $n$  испытаний правильной монеты. Пусть  $\mathcal{A}$  – булева алгебра всевозможных подмножеств пространства  $\Omega$  элементарных исходов этого эксперимента, число которых равно  $2^n$ . В соответствии с вероятностной моделью, обоснование которой было дано в §1, распределение вероятностей  $\{P(A), A \in \mathcal{A}\}$  на булевой алгебре  $\mathcal{A}$  определяется следующим образом:  $P(A)$  равна числу элементарных исходов, содержащихся в событии  $A$ , поделенное на  $2^n$ . Рассмотрим  $n$  подалгебр  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  булевой алгебры  $\mathcal{A}$ , где  $\mathcal{A}_i$  порождается противоположными событиями  $A_i$  – при  $i$ -ом испытании выпал герб и  $A_i^c$  – выпала решка, то есть  $\mathcal{A}_i = \{A_i, A_i^c, \Omega, \emptyset\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Покажем, что эти подалгебры независимы в совокупности.

Пусть  $B_1, \dots, B_n$  – некоторый набор элементов (событий) из соответ-

ствующих подалгебр. Требуется показать, что

$$P\left(\bigcap_1^n B_i\right) = \prod_1^n P(B_i). \quad (2)$$

Каждое из событий  $A_i$  или  $A_i^c$  состоит из  $2^{n-1}$  исходов, поэтому  $P(B_i) = 1/2$ , если  $B_i = A_i$  или  $A_i^c$ ;  $P(B_i) = 1$ , если  $B_i = \Omega$ , и  $P(B_i) = 0$ , если  $B_i = \emptyset$ . Таким образом, (2) выполняется тривиальным образом, если хотя бы одно из  $B_i = \emptyset$ ; достоверные события  $B_i = \Omega$  при доказательстве (2) можно просто игнорировать, так что осталось убедиться в справедливости (2), когда все  $B_i$  равны  $A_i$  или  $A_i^c$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Но в таком случае  $\bigcap_1^n B_i$  совпадает с одним из элементарных исходов, вероятность которого равна  $2^{-n}$  (значение левой части (2)), и то же значение принимает правая часть (2), поскольку все  $P(B_i) = 1/2$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Рассмотренный пример указывает нам путь к построению вероятностной модели статистического эксперимента с независимыми испытаниями “гнутой” монеты, для которой вероятность выпадения герба отлична от  $1/2$ . Естественно, такого рода испытания осуществляются в практической и научной деятельности не только сгнутой монетой – испытания с бинарными исходами имеют место при контроле качества (изделия могут быть кондиционными и дефектными), эпидемиологических исследованиях (выбранная особь из популяции инфицирована или нет) и т.п. Общая теория экспериментов с бинарными исходами была разработана в XVII веке И.Бернулли и поэтому названа его именем.

**Схема испытаний Бернулли.** Эксперимент состоит в наблюдении  $n(\geq 1)$  однотипных объектов, каждый из которых с одинаковой вероятностью  $p$  может обладать определенным признаком или нет. Если  $i$ -ый объект обладает указанным признаком, то говорят, что  $i$ -ое испытание завершилось успехом, и в журнале наблюдений против  $i$ -го объекта ставится цифра 1; отсутствие признака (неудача) отмечается цифрой 0,  $i = 1, \dots, n$ . Таким образом, результат эксперимента можно представить в виде последовательности  $x_1, \dots, x_n$  наблюдений случайных индикаторов  $X_1, \dots, X_n$  – случайных величин, принимающих значение 1 с вероятностью  $p$  и 0 с вероятностью  $1 - p$ . В этих обозначениях вероятность того, что при  $i$ -ом испытании  $X_i$  приняло значение  $x_i$  (равное 0 или 1), можно представить формулой

$$P(X_i = x_i) = p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Как и в испытаниях правильной монеты, пространство  $\Omega$  элементарных исходов рассматриваемого эксперимента состоит из  $2^n$  элементов вида  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть  $\mathcal{A}$  – булева алгебра всевозможных подмножеств  $\Omega$  и  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  – подалгебры  $\mathcal{A}$ , причем  $\mathcal{A}_i$  порождается событием  $X_i = x_i$  ( $=0$  или  $1$ ),  $i = 1, \dots, n$ . Если нам *a priori* известно, что как наблюдаемые объекты, так и результаты наблюдений над ними, не оказывают влияния друг на друга, то естественно формализовать эту априорную информацию в виде утверждения: “подалгебры  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  независимы в совокупности”. В таком случае вероятность каждого элементарного исхода  $x_1, \dots, x_n$  совпадает с вероятностью одновременного осуществления  $n$  независимых событий  $X_i = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  и, следовательно,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Полученное распределение вероятностей на пространстве элементарных исходов  $\Omega$  обладает одной интересной особенностью:  $C_n^m$  исходов, содержащих одно и то же количество  $m = \sum_{i=1}^n x_i$  успешных испытаний, обладают одинаковой вероятностью их появления, равной  $p^m (1-p)^{n-m}$ . Рассмотрим в связи с этим случайную величину

$$X = \sum_{i=1}^n X_i,$$

результат наблюдения которой  $m$  трактуется как число успешных испытаний в эксперименте. На пространстве значений  $m = 0, 1, \dots, n$  этой случайной величины получаем распределение вероятностей, которое называется *биномиальным распределением*

$$P(X = m | p, n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Отметим, что биномиальное распределение служит аппроксимацией гипергеометрического распределения при больших значениях  $N$  и  $M$  (см. задачу 3 и формулу 2 в §1). Имеет место

**Предложение 3.2.** *Если в гипергеометрическом распределении  $P(X = m | N, M, n)$  параметры  $N \rightarrow \infty$ ,  $M \rightarrow \infty$  и при этом  $M/N \rightarrow p$ , то для всех фиксированных  $n$  и  $m$*

$$P(X = m | N, M, n) \rightarrow P(X = m | p, n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Доказательство легко получить, используя следующие элементарные преобразования гипергеометрической вероятности:

$$\begin{aligned}
P(X = m | N, M, n) &= \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \\
&= \frac{M!}{m!(M-m)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(n-m)!(N-M-(n-m))!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!} = \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot [(M-m+1) \cdots (M-1)M] \cdot \\
&= \frac{[(N-M-(n-m)+1) \cdots (N-M+1)(N-M)]}{(N-n+1) \cdots (N-1)N} = \\
&= C_n^m \left[ \left( \frac{M}{N} - \frac{m-1}{N} \right) \cdots \left( \frac{M}{N} - \frac{1}{N} \right) \frac{M}{N} \right] \cdot \\
&= \left[ \left( 1 - \frac{M}{N} - \frac{n-m-1}{N} \right) \cdots \left( 1 - \frac{M}{N} - \frac{1}{N} \right) \left( 1 - \frac{M}{N} \right) \right] \cdot \\
&= \left[ \left( 1 - \frac{n-1}{N} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \cdot 1 \right]^{-1}.
\end{aligned}$$



Следующие две формулы условной вероятности играют важную роль при решении многих практических задач. Обе формулы связаны с так называемой *полной группой событий*  $\{B_1, \dots, B_n\}$ , которые несовместны ( $B_i \cap B_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ) и в объединении дают все пространство элементарных исходов  $\Omega$ . Говорят, что эта группа событий определяет *разбиение*  $\Omega$ , так как  $\Omega = \sum_1^n B_i$ .

**Предложение 3.3 (Формула полной вероятности).** Для любого события  $A$  и полной группы событий  $\{B_1, \dots, B_n\}$  справедлива формула

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i).$$

Доказательство немедленно следует из следующей цепочки равенств, в которой на последнем этапе используется формула условной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap \sum_1^n B_i) = \\ &P(\sum_1^n A \cap B_i) = \sum_1^n P(A \cap B_i) = \sum_1^n P(A | B_i)P(B_i). \end{aligned}$$

**Предложение 3.4 (Формула Байеса).** Для любого события  $A$  и полной группы событий  $\{B_1, \dots, B_n\}$  справедлива формула

$$P(B_k | A) = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}.$$

Доказательство. В силу формулы условной вероятности  $P(A \cap B_k) = P(A | B_k)P(B_k)$ , поэтому

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{P(A)}.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства вместо  $P(A)$  ее выражение по формуле полной вероятности, получаем искомую формулу Байеса.

*З а м е ч а н и е.* Вероятности  $P(B_1), \dots, P(B_n)$  часто называют *априорными* вероятностями группы событий  $B_1, \dots, B_n$ , в то время как условные вероятности  $P(B_1 | A), \dots, P(B_n | A)$  – *апостериорными*, полученными после дополнительного эксперимента, в котором произошло событие  $A$ . В связи с этим формула Байеса называется также формулой *обновления априорных вероятностей*.

Приведем несколько задач, решаемых с помощью полученных формул условной вероятности.

**Задача 3.1.** Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, наугад вынимают 2 шара и перекладывают в другую урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Какова вероятность иметь белый шар при случайном выборе одного шара из второй урны после перекладывания?

Эта задача решается обычно с помощью формулы полной вероятности. Пусть  $A$  – событие, означающее отбор белого шара. Определим полную группу событий в соответствии с возможными результатами перекладывания:  $B_1 = \{\text{Б,Б}\}$ ,  $B_2 = \{\text{Б,Ч}\} + \{\text{Ч,Б}\}$ ,  $B_3 = \{\text{Ч,Ч}\}$ . Здесь первая буква в фигурных скобках указывает цвет шара (Б – белый, Ч – черный), который был вынут из первой урны первым, а вторая буква – цвет второго шара. Термин “наугад” означает, что вероятность вынуть шар определенного цвета равна отношению числа шаров этого цвета к общему числу шаров в урне. В таком случае, в соответствии с формулой условной вероятности,  $P(B_1) = P(\text{Б} \cap \text{Б}) = P(\text{второй шар белый} | \text{первый шар белый}) \cdot P(\text{первый шар белый}) = (3/5) \cdot (2/4) = 3/10$ . Аналогично,  $P(B_2) = (3/5) \cdot (2/4) + (2/5) \cdot (3/4) = 6/10$  и  $P(B_3) = (2/5) \cdot (1/4) = 1/10$ . Условные вероятности события  $A$  вычисляются в соответствии с числом белых шаров во второй урне после добавления в нее двух шаров из первой урны:  $P(A | B_1) = 6/10$ ,  $P(A | B_2) = 5/10$ ,  $P(A | B_3) = 4/10$ . Формула полной вероятности дает

$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{13}{25}. \quad (3)$$

*З а м е ч а н и е к задаче 3.1.* Следует обратить особое внимание на пространство  $\Omega$  элементарных исходов в этой задаче, – глубоко заблуждается тот, кто наделяет  $\Omega$  всего двумя элементами Б и Ч. Наш эксперимент состоял не только в отборе шара из второй урны – перед этим производился случайный отбор двух шаров из первой урны, и результат этого отбора

влият на условную вероятность выбора белого шара. Пространство  $\Omega$  в действительности состоит из восьми элементов

$$\begin{array}{cccc} \text{ББ.Б} & \text{БЧ.Б} & \text{ЧБ.Б} & \text{ЧЧ.Б} \\ \text{ББ.Ч} & \text{БЧ.Ч} & \text{ЧБ.Ч} & \text{ЧЧ.Ч} \end{array} \quad (3)$$

Здесь первые две буквы до точки указывают цвет шаров, вынутых из первой урны, а буква после точки – цвет шара, вынутого из второй урны после перекладывания. Вычисления, проводимые в (3), представляют собой суммирование вероятностей элементарных исходов, указанных в первой строке таблицы.

Следующая задача удивительно точно иллюстрирует недоразумения, которые могут возникнуть из-за неправильной спецификации пространства элементарных исходов.

**Задача 3.2.** Экспериментатор располагает двумя парами шаров одинакового цветового состава БЧ и ЧЧ. Из каждой пары наугад выбирается по одному шару и бросается в урну, где лежит белый шар. Из трех шаров в урне наугад отбирается один. Какова вероятность, что вынут белый шар?

Мы снова находимся в ситуации, связанной с применением формулы полной вероятности, где полная группа событий соотносится с возможным составом урны:  $B_1 = \text{БББ}$  (в урне 3 белых шара),  $B_2 = \text{ББЧ} + \text{БЧБ}$  (в урне 2 белых) и  $B_3 = \text{БЧЧ}$  (в урне 1 белый). Поскольку вероятность выбора шара определенного цвета из каждой пары равна  $1/2$  и выбор в каждой паре осуществляется независимо от результата выбора в другой, то вероятности событий из полной группы вычисляются очень просто:  $P(B_1) = P(B_3) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ ,  $P(B_2) = (1/2) \cdot (1/2) + (1/2) \cdot (1/2) = 1/2$ . Условные вероятности отбора белого шара при каждом фиксированном составе урны равны  $P(A | B_1) = 1$ ,  $P(A | B_2) = 2/3$ ,  $P(A | B_3) = 1/3$ . Теперь, используя формулу полной вероятности, находим  $P(A) = 1 \cdot (1/4) + (2/3) \cdot (1/2) + (1/3) \cdot (1/4) = 2/3$ . Если игнорировать процесс случайного формирования состава урны и считать, что мы имеем дело с двухточечным пространством элементарных исходов  $\Omega = \{\text{Б}, \text{Ч}\}$ , то приходим к парадоксальному выводу: состав урны всегда один и тот же – два белых и один черный!

Нетрудно понять, что в этой задаче пространство элементарных исходов то же, что и в предыдущей задаче 3.1 (дополнительный белый шар фиксирован и его можно не учитывать при определении  $\Omega$ ), и наши вычисления  $P(A)$  состоят в суммировании вероятностей элементарных исходов первой строки в таблице, представляющей пространство  $\Omega$ .

### Задача 3.3 Статистический контроль качества. Формула

Байеса играет большую роль в планировании процедур гарантийного контроля качества выпускаемой продукции. Производитель продукта должен выполнять определенные договорные обязательства перед потребителем, которые, так или иначе, сводятся к ограничениям на долю некондиционной продукции, поставляемой потребителю, или, что то же, доля кондиционной продукции должна быть достаточно высокой. Обеспечение этих ограничений достигается с помощью контроля (как правило, выборочного) производимой продукции. Пусть  $Q_{in}$  – доля кондиционной продукции среди изготавливаемой предприятием. Обычно эта доля называется *входным уровнем качества*, и необходимость контроля продукции обуславливается невысоким значением  $Q_{in}$ , которое не удовлетворяет потребителя. Если контроль продукции производится на основе обследования только ее части (так называемый *выборочный* или *статистический* контроль качества), то возникает вероятность принятия ошибочного решения о качестве контролируемого продукта: с некоторой вероятностью  $\beta$  процедура контроля может пропустить некондиционный продукт или, наоборот, с вероятностью  $\alpha$  отклонить кондиционный. Вероятность  $\beta$  называется *риском потребителя*, а вероятность  $\alpha$  – *риском изготовителя*. Существуют методы расчета этих рисков на основе вероятностной модели статистического контроля, с которыми мы познакомимся в курсе математической статистики. Зная значения  $Q_{in}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , можно, используя формулу Байеса, вычислить *выходной уровень качества*  $Q_{out}$  – долю кондиционной продукции, среди отсылаемой потребителю после контроля.

Пусть  $B_1$  – событие, состоящее в том, что поступивший на контроль продукт кондиционен, а  $B_2 = B_1^c$  – продукт “плохой”. В наших обозначениях  $P(B_1) = Q_{in}$ . Пусть, далее,  $A$  – утверждение о кондиционности продукта после его контроля. Тогда  $Q_{out} = P(B_1 | A)$  – вероятность кондиционности продукта при условии, что он прошел контроль. Наконец,  $P(A | B_1) = 1 - \alpha$  и  $P(A | B_2) = \beta$ . По формуле Байеса

$$Q_{out} = P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1)P(B_1)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2)} = \frac{(1 - \alpha)Q_{in}}{(1 - \alpha)Q_{in} + \beta(1 - Q_{in})}.$$

Проиллюстрируем расчеты, производимые по этой формуле, на основе конкретных числовых данных. Пусть предприятие работает из рук вон

плохо:  $Q_{in} = 0.1$  (90% выпускаемой продукции не удовлетворяет нормам качества), но на предприятии существует довольно жесткий контроль, в котором риск потребителя  $\beta = 0.01$ , а риск изготовителя  $\alpha = 0.1$ . Тогда выходной уровень качества

$$Q_{out} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot 0.9} = \frac{10}{11} \approx 0.91,$$

и это совсем неплохо по сравнению с тем, что было до контроля.

## §4. Случайные величины и функции распределения

### Лекция 6

В применениях методов теории вероятностей исследователь чаще всего имеет дело с числовыми характеристиками наблюдаемого объекта, которые являются функциями элементарных исходов – состояний объекта. При использовании различных характеристик важным является то обстоятельство, что все они определены на одном и том же пространстве  $\Omega$ , и если мы приступаем к построению вероятностной модели, на основании которой будет получено распределение наблюдаемой характеристики  $X = X(\omega)$ , то мы должны понимать, что это распределение индуцировано исходным распределением  $P$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств  $\Omega$ . Напомним, что такого рода построения проводились при выводе гипергеометрического и биномиального распределений.

Итак, мы приступаем к теории распределений функций  $X = X(\omega)$  на пространстве элементарных исходов, фиксируя некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Областью значений функции  $X$  служит евклидово пространство  $\mathbb{R}$ , и это пространство является новым пространством элементарных исходов. Поскольку нас, в основном, будут интересовать вероятности попадания значений  $X$  в интервалы, то естественно рассмотреть булеву  $\sigma$ -алгебру подмножеств  $\mathbb{R}$ , порожденную всевозможными интервалами на прямой  $\mathbb{R}$ . Как нам известно из общего курса анализа, такая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}$ , состоящая из всевозможных объединений и пересечений счетного числа интервалов, называется *борелевским полем*, и для ее построения достаточно рассмотреть открытые интервалы вида  $(-\infty, x)$ .

Введем измеримое пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  значений  $X$  и рассмотрим следующий, совершенно естественный метод “наведения” распределения  $P^X$  на  $\mathcal{B}$  посредством вероятности  $P$  на  $\mathcal{A}$ . Каждому борелевскому множеству  $B \in \mathcal{B}$  сопоставим его *прообраз*  $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \subset \Omega$ . Если  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , то естественно определить вероятность попадания значения  $X$  в  $B$  как  $P^X(B) = P(X^{-1}(B))$ . Функции, которые обладают свойством  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  при любом  $B \in \mathcal{B}$ , называются *измеримыми*, и в дальнейшем будут рассматриваться только такие характеристики наблюдаемого объекта. Мы подошли к основному понятию теории распределений на подмножествах  $\mathbb{R}$ .

**Определение 4.1.** Случайной величиной  $X = X(\omega)$  называется измеримое отображение измеримого пространства  $(\Omega, \mathcal{A})$  на борелевскую пря-

мую  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

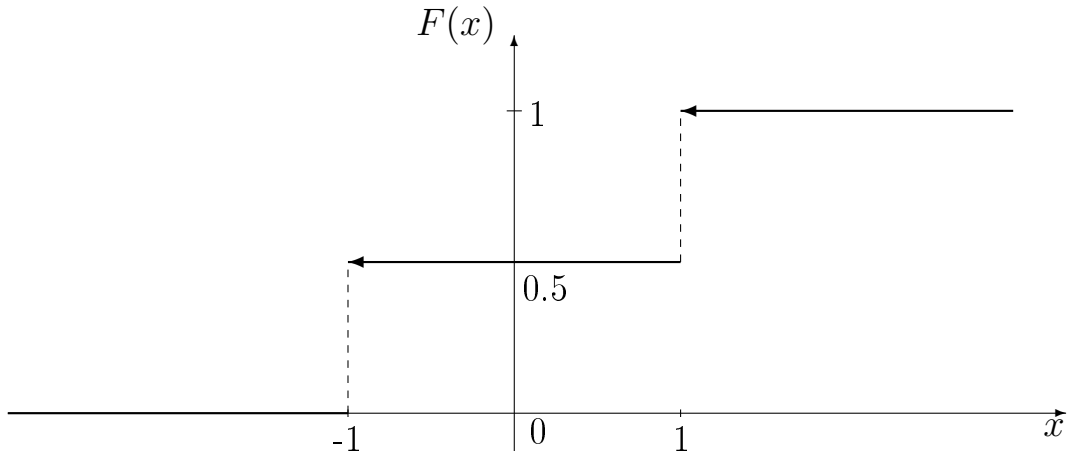
Легко понять, что, с точки зрения практических приложений, мы могли бы не обращаться к определению случайной величины, как измеримой функции, а просто сказать, что сейчас мы займемся построением вероятностных моделей, в которых пространство элементарных исходов есть числовая прямая. Тем не менее, чтобы описать класс возможных распределений наблюдаемой случайной величины  $X$  иногда просто необходимо знать причину изменчивости состояний объекта (или инструмента исследования), которая обуславливает разные значения в повторных наблюдениях  $X$ .

Борелевское поле  $\mathcal{B}$ , на котором будет определяться распределение  $X$ , является чрезвычайно сложным объектом с точки зрения строения его элементов, поэтому задание функции  $P(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}$  представляется совершенно неразрешимой проблемой. Однако мы знаем, что  $\mathcal{B}$  порождается интервалами вида  $(-\infty, x)$  (событиями  $X < x$ ), и это указывает простой путь к заданию распределения случайной величины  $X$ . Что если начать с задания вероятности только на событиях, порождающих  $\mathcal{B}$ , то есть с определения функции  $F(x) = P(X < x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , потом распространить ее аддитивным образом на булеву алгебру конечных объединений всевозможных интервалов на  $\mathbb{R}$ , показать, что полученная таким образом аддитивная функция на булевой алгебре обладает свойством непрерывности относительно монотонно убывающих последовательностей событий (является вероятностью) и, наконец, закончить построение вероятности на  $\mathcal{B}$  ссылкой на теорему об единственности продолжения вероятности с булевой алгебры объединений интервалов на порожденную этой алгеброй  $\sigma$ -алгебру борелевских подмножеств  $\mathbb{R}$ .

Мы приступаем к реализации этой программы и введем сначала

**Определение 4.2.** Функция  $F(x) = P(X < x)$ , определенная на всей числовой прямой  $\mathbb{R}$ , называется *функцией распределения* случайной величины  $X$ .

**Пример 4.1.** Пусть случайная величина  $X$  принимает с ненулевой вероятностью всего два значения:  $x = -1$  с вероятностью  $1/2$  и  $x = +1$  с той же вероятностью  $1/2$  (игра в орлянку со ставкой 1 рубль). Тогда функция распределения  $X$  имеет следующий вид.



Действительно, для любого  $x < -1$  множество  $(-\infty, x)$  не содержит значений  $X$ , которые она могла бы принять с положительной вероятностью, так что  $F(x) = P(X < x) = 0$ . Далее,  $F(-1) = P(X < -1) = 0$ , но если  $-1 < x \leq +1$ , то  $F(x) = P(X = -1) = 1/2$ . В области  $x > +1$  содержатся все значения случайной величины  $X$ , которые она принимает с положительной вероятностью, поэтому  $F(x) = 1$  при  $x > +1$ .

Исследуем некоторые особенности поведения функции  $F$ .

**Предложение 4.1.** *Функция  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  обладает следующими свойствами.*

$$(F1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

$$(F2) \quad F(x) \text{ — неубывающая функция } x \in \mathbb{R}.$$

$$(F3) \quad \text{Функция } F(x) \text{ непрерывна слева: } \lim_{x \rightarrow a-} F(x) = F(a).$$

(F4) *Вероятности попадания значений случайной величины  $X$  в интервалы на  $\mathbb{R}$  вычисляются по формулам*

$$P\{X \in [a, b)\} = F(b) - F(a), \quad P\{X \in [a, b]\} = F(b+) - F(a),$$

$$P\{X \in (a, b]\} = F(b+) - F(a+), \quad P\{X \in (a, b)\} = F(b) - F(a+).$$

$$(F5) \quad \text{Функция } F(x) \text{ имеет не более чем счетное множество скачков.}$$

Доказательство. (F1). Рассмотрим события  $\{A_n = (-\infty, x_n), n \geq 1\}$ . Если  $x_n \searrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то, очевидно,  $A_n \downarrow \emptyset$ , и, аналогично,



$A_n \uparrow \mathbb{R}(= \Omega)$ , если  $x_n \nearrow +\infty$ . Так как  $F(x_n) = P(X < x_n) = P(A_n)$ , то свойства (F1) вытекают из аксиомы непрерывности (P3) вероятности  $P$ .

(F2). Если  $x_1 \leq x_2$ , то  $F(x_1) \leq F(x_2)$ , так как  $A_1 = (-\infty, x_1) \subset A_2 = (-\infty, x_2)$  и, в силу свойства монотонности вероятности (см. (3) в предложении 2.2),  $F(x_1) = P(A_1) \leq P(A_2) = F(x_2)$ .

(F3). Пусть последовательность  $x_n \uparrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ , так что соответствующая последовательность событий  $A_n = (-\infty, x_n) \uparrow A = (-\infty, x)$ . Используя свойство (P3) непрерывности  $P$ , получаем  $F(x_n) = P(A_n) \rightarrow P(A) = F(x)$ , что, по определению, означает непрерывность слева функции  $F(x)$ .

(F4). Если  $A \subset B$ , то  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$  (см. (3) в предложении 2.2). Из этого свойства вероятности и только что доказанного свойства непрерывности вытекает, что, например, замкнутый интервал  $[a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a)$ , и поскольку множество  $(-\infty, a) \subset (-\infty, b]$ , то  $P\{X \in [a, b]\} = P\{X \in (-\infty, b]\} - P\{X \in (-\infty, a)\} = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b+) - F(a)$ . В последнем равенстве мы использовали запись  $F(b+)$  для выражения вероятности события  $\{X \leq b\}$ . Дело в том, что  $P(X < b) = F(b)$ , и если в точке  $b$  функция  $F(x)$  имеет скачок, то его величина равна  $F(b+) - F(b)$ .

(F5). В этом пункте предложения утверждается, что все скачки (точки разрыва) функции  $F(x)$  можно занумеровать. Поступим следующим образом: рассмотрим последовательность множеств  $\{A_n, n \geq 1\}$ , где  $A_n$  есть множество точек разрыва функции  $F(x)$  с величиной скачка, не меньшей  $1/n$ . Поскольку  $0 \leq F(x) \leq 1$ , то множество  $A_n$  конечно и содержит не более чем  $n$  точек. Следовательно, мы можем занумеровать все скачки функции  $F(x)$  в порядке убывания их величины, осуществляя последовательную нумерацию точек множества  $A_1$ , потом  $A_2$  и так далее, возможно, до бесконечности, если число скачков  $F(x)$  не конечно. При таком способе нумерации любому, сколь угодно малому по величине скачку функции  $F(x)$  рано или поздно будет присвоен номер.

Итак, мы убедились, что функция распределения является хорошим и достаточно простым инструментом для вычисления вероятностей попадания значений случайной величины в интервалы на действительной прямой. Однако, если мы определим только вероятности элементов борелевского поля  $\mathcal{B}$ , имеющих вид интервалов, то сможем ли на основании их вычислять вероятности других событий из  $\mathcal{B}$ ? Ответ на этот вопрос дает

**Теорема 4.1.** Пусть функция  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , обладает свойствами

$$(F1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$$

$$(F2) \quad F(x) \text{ — неубывающая функция } x \in \mathbb{R};$$

$$(F3) \quad F(x) \text{ непрерывна слева: } \lim_{x \rightarrow a-} F(x) = F(a).$$

Тогда на борелевской прямой  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  существует единственная вероятность  $P$ , для которой  $P\{(-\infty, x)\} = F(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Функция  $F(x)$  определяет функцию множеств  $P'$  на семействе  $\mathcal{C}$  открытых интервалов вида  $C = C_x = (-\infty, x)$  посредством равенства  $P'(C_x) = F(x)$ , причем, в силу свойства (F1),  $P'(\Omega) = P'(\mathbb{R}) = 1$ . Распространим эту функцию множеств на булеву алгебру  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ , порожденную семейством  $\mathcal{C}$ . Элементы  $A$  булевой алгебры  $\mathcal{A}$  очевидно имеют вид  $A = \sum_1^k [a_i, b_i)$ , и поэтому естественно положить (см. (F4) в предложении 4.1)  $P'(A) = \sum_1^k [F(b_i) - F(a_i)]$ .

Очевидно, функция множеств  $P'(A)$  на булевой алгебре  $\mathcal{A}$  обладает такими свойствами вероятности, как нормируемость (P1) и конечная аддитивность (P2). Если мы покажем, что  $P'$  обладает свойством  $\sigma$ -аддитивности (P2'), то утверждение теоремы будет простым следствием общей теоремы о продолжении меры на порожденную булевой алгеброй  $\sigma$ -алгебру, ибо, как известно, борелевское поле порождается алгеброй  $\mathcal{A}$  (более того, — семейством  $\mathcal{C}$ ).

Рассмотрим произвольную последовательность не пересекающихся множеств

$$A_n = \sum_{i=1}^{k_n} [a_{ni}; b_{ni}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

для которой множество  $A = \sum_1^\infty A_n$  принадлежит алгебре  $\mathcal{A}$ . По определению алгебры  $\mathcal{A}$  это означает, что множество  $A$  можно представить в виде конечного объединения интервалов, не имеющих точек соприкосновения:  $A = \sum_1^m [c_j; d_j)$ . После соответствующей перестановки интервалов внутри объединения множеств  $A_n$ , можно добиться для каждого из интервалов  $[c_j; d_j)$  представления вида  $[c_j; d_j) = \sum_1^\infty [a_{jk}; b_{jk}), \quad j = 1, \dots, m$ . Таким образом, достаточно доказать, что для любых  $c < d$

$$F(d) - F(c) = \sum_{j=1}^{\infty} [F(b_j) - F(a_j)], \quad (1)$$

если интервал  $[c; d) = \sum_1^\infty [a_j; b_j)$ .

Очевидно,  $F(d) - F(c) \geq \sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)]$ , ибо дополнение множества  $\sum_1^n [a_j; b_j)$  до интервала  $[c, d)$  можно представить в виде конечного объединения не пересекающихся полуоткрытых интервалов. Устремляя  $n$  к бесконечности, получаем  $F(d) - F(c) \geq \sum_1^\infty [F(b_j) - F(a_j)]$ .

Покажем теперь, что имеет место противоположное неравенство, и, следовательно, справедливо равенство (1).

Предположим сначала, что  $-\infty < c < d < \infty$ . Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Исходный интервал  $[c; d)$  сузим до замкнутого интервала  $[c; d']$  так, чтобы  $d' < d$  и  $F(d') \geq F(d) - \varepsilon$ . Этого всегда можно добиться в силу непрерывности слева функции  $F$ . Аналогично, каждый из интервалов  $[a_n; b_n)$  расширим до открытого интервала  $(a'_n; b_n)$  так, чтобы  $a'_n < a_n$  и  $F(a'_n) \geq F(a_n) - \varepsilon/2^n$ . В результате получим покрытие  $[c; d'] \subset \bigcup_{n=1}^\infty (a'_n; b_n)$  ограниченного замкнутого множества семейством открытых интервалов.

В силу известной леммы Гейне-Бореля найдется конечное покрытие  $[c; d'] \subset \bigcup_{i=1}^N (a'_{n_i}; b_{n_i})$ , в котором  $a'_{n_1} < c$ ,  $b_{n_N} > d'$  и  $b_{n_{i-1}} > a'_{n_i}$  для всех  $i = 2, \dots, N$ . Точки  $b_{n_1}, \dots, b_{n_{N-1}}$  образуют разбиение интервала  $[a'_{n_1}, b_{n_N})$ , который содержит интервал  $[c, d')$ , и поэтому

$$F(d') - F(c) \leq F(b_{n_N}) - F(a'_{n_1}) = F(b_{n_1}) - F(a'_{n_1}) + \\ \sum_{i=2}^N [F(b_{n_i}) - F(b_{n_{i-1}})] \leq \sum_{i=1}^N [F(b_{n_i}) - F(a'_{n_i})] \leq \sum_{n=1}^\infty [F(b_n) - F(a'_n)].$$

Из построения интервалов следует, что  $F(d) - F(c) \leq F(d') - F(c) + \varepsilon$  и  $F(b_n) - F(a'_n) \leq F(b_n) - F(a_n) + \varepsilon/2^n$ , откуда

$$F(d) - F(c) \leq \sum_{n=1}^\infty [F(b_n) - F(a_n)] + 2\varepsilon. \quad (2)$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем окончательное доказательство равенства (1) для конечных интервалов.

Для бесконечных интервалов вида  $[c; \infty)$  достаточно, воспользовавшись свойствами функции  $F$ , рассмотреть конечный интервал  $[c; d)$ , удовлетворяющей условию  $1 - F(d) \leq \varepsilon$ . Открытое покрытие исходного интервала  $[c; \infty)$  индуцирует естественным образом открытое покрытие интервала  $[c; d]$ , к которому применимы все предыдущие рассуждения, приводящие

к неравенству (2). Очевидно, разность  $1 - F(c)$  не превосходит правой части (2) с заменой  $2\varepsilon$  на  $3\varepsilon$ , что завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема позволяет нам вычислять вероятности событий с помощью интеграла Стильеса:

$$P(A) = \int_A dF(x), \quad A \in \mathcal{A}.$$

## §5. Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения

Лекция 7

В этом параграфе мы будем решать несколько практических задач на построение вероятностных моделей, цель которого состоит в спецификации наиболее узкого семейства возможных распределений наблюдаемой случайной величины  $X$ . Эти модели носят универсальный характер и применяются в различных областях науки и практической деятельности, поэтому целесообразно после решения каждой задачи рассмотреть возможные аналоги этих задач, приводящие к тем же вероятностным моделям. Каждой модели мы присвоим свое имя и аббревиатуру, содержащую “параметры” модели; значения параметров, как правило, неизвестны, и определение этих значений составляет предмет другой, родственной теории вероятностей, науки – математической статистики.

Собственно говоря, мы уже давно занимаемся построением вероятностных моделей с помощью функций распределений случайных величин, принимающих дискретный ряд значений, – речь идет о гипергеометрическом и биномиальном распределениях (см. §2 и §3). Вероятность, с которой случайная величина принимала конкретное целочисленное значение  $m$ , равна величине скачка функции распределения в точке  $x = m$ . С этих двух распределений мы начнем составление нашего каталога вероятностных моделей.

**Гипергеометрическое распределение**  $GG(N, M, n)$ . Исследуется конечная популяция, состоящая из  $N$  единиц, часть из которых ( $M$  единиц) помечены. Из популяции извлекается случайная выборка объема  $n$ , и с этой выборкой соотносится случайная величина  $X$ , наблюдаемое значение  $x$  которой указывает число помеченных единиц в выборке. Область значений  $X$ , которые она принимает с ненулевой вероятностью, составляют целочисленные точки отрезка  $\mathcal{X} = [\max(0, n - (N - M)); \min(n, M)]$ .

Функция распределения  $F(x)$  равна нулю в области, лежащей слева от  $\mathcal{X}$ , и как только  $x$  выходит на правый конец отрезка  $\mathcal{X}$ , функция  $F(x)$  принимает значение 1, которое сохраняет при всех  $x$ , лежащих справа от  $\mathcal{X}$ . Внутри отрезка  $\mathcal{X}$  функция распределения имеет ступенчатый вид, возрастая скачками в целочисленных точках  $x = m$ , и величина скачка определяется

формулой (2) §1:

$$P(X = m) = F(m+) - F(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m \in \mathcal{X}.$$

Переменные  $N$ ,  $M$  и  $n$  являются *параметрами* модели; в практических приложениях модели  $GG(N, M, n)$  значение по крайней мере одного из параметров  $N$  или  $M$  неизвестно. Область возможных значений параметров составляет так называемое *параметрическое пространство* и обозначается обычно  $\Theta$ . В данном случае  $\Theta$  состоит из целочисленных значений параметров  $N$ ,  $M$  и  $n$ , причем  $N \geq 2$ ,  $1 \leq M \leq N$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

Итак, дискретная вероятностная модель гипергеометрического распределения полностью определяется “функцией скачков”  $f(x | \theta)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\theta = (N, M, n) \in \Theta$ , которая принимает ненулевые значения  $P(X = x)$  только в целочисленных точках  $x$  отрезка  $\mathcal{X}$ . Функция  $f(\cdot | \theta)$  обычно называется *функцией плотности* распределения случайной величины  $X$ . Вероятность события вида  $X \in B$  ( $B \in \mathfrak{B}$ ) вычисляется с помощью  $f$  по формуле

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B} f(x | \theta),$$

в частности, функция распределения

$$F(x) = \sum_{t < x} f(t | \theta).$$

**Биномиальное распределение  $B(n, p)$ .** Рассматривается схема независимых испытаний, каждое из которых с некоторой вероятностью  $p$  может быть “успешным” (в результате испытания осуществилось некоторое событие  $A$ ) или, с вероятностью  $1 - p$ , “неудачным”. Нас интересует распределение случайной величины  $X$ , результат  $x$  наблюдения которой регистрирует число успехов в  $n$  испытаниях Бернулли.

Как было установлено в §3, распределение  $X$  определяется функцией плотности  $f(x | \theta)$ , принимающей ненулевые значения  $C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}$  ( $= P(X = x)$ ) только в точках  $x = 0, 1, \dots, n$ , в то время как двумерный параметр  $\theta = (n, p)$  может изменяться в области  $\Theta = \mathbb{N} \times [0; 1]$ , где  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  – множество целых чисел. Поведение биномиальной функции распределения аналогично поведению  $F(x)$  в модели  $GG(N, M, n)$ , если считать, что отрезок  $\mathcal{X} = [0; n]$ .

В практических применениях биномиального распределения обычно неизвестно только значение параметра  $p$  – вероятности успеха в испытаниях Бернулли. Однако существуют ситуации, когда экспериментатор регистрирует только число успехов  $x$ , не имея сведений о числе испытаний  $n$ . Например, в исследованиях нервного синапса прибор регистрирует только общее напряжение электрического поля, и по величине этого напряжения определяется количество  $x$  пузырьков с ацетилхолином, освободившихся при раздражении нерва. Ни общее количество  $n$  пузырьков, ни вероятность  $p$  выброса из пузырька ацетилхолина, экспериментатору неизвестны, – проблема оценки параметров  $n$  и  $p$  составляет предмет исследования.

Особо следует отметить частный случай биномиального распределения с одним испытанием ( $n = 1$ ) в схеме Бернулли. Это так называемое *двухточечное* распределение вероятностей  $B(1, p)$  с функцией плотности

$$f(x | p) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

В §3 было установлено, что модель  $B(n, p)$  является “предельной” для модели  $GG(N, M, n)$ , когда размер  $N$  популяции неограниченно растет и число  $M$  помеченных единиц соизмеримо с  $N$ , то есть  $M/N = p$  ( $= \text{const}$ ). Следующая вероятностная модель, имеющая широкие практические применения, является предельной для биномиальной модели, когда число проводимых испытаний  $n$  велико, а вероятность  $p$  успешного испытания чрезвычайно мала.

**Распределение Пуассона  $P(\lambda)$ .** При исследовании интенсивности радиоизлучения обычно регистрируется число  $x$  атомов радиоактивного элемента, распавшихся за единицу времени. Повторные наблюдения указывают на значительную изменчивость числа распавшихся атомов, и поэтому проблема стабильного, не зависящего от случайных флуктуаций, показателя интенсивности излучения должна решаться в рамках теории вероятностей.

Пусть  $X$  – случайная величина, которая наблюдается в эксперименте,  $n$  – число атомов, из которых состоит образец исследуемого радиоактивного элемента,  $p$  – вероятность, с которой возможен распад любого из атомов образца за время наблюдения. Существующая теория радиоактивного излучения утверждает, что атомы распадаются независимо друг от друга, и поэтому результат  $x$ , который фиксирует счетчик распавшихся атомов, можно трактовать как реализацию случайной величины  $X$  с биномиальным законом  $B(n, p)$  распределения вероятностей. Легко понять, что рас-

чет вероятностей исходов эксперимента по формуле

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

вряд ли возможен из-за непреодолимых технических сложностей, вызванных огромным значением  $n$  и ничтожно малым значением  $p$ . Поэтому возникает математическая проблема асимптотики биномиальных вероятностей, когда  $n \rightarrow \infty$  и одновременно  $p \rightarrow 0$ . Решение проблемы дает

**Предложение 5.1.** Если  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  и при этом  $np = \lambda$  ( $= \text{const}$ ), то

$$P\{X = x | n, p\} \longrightarrow \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

**Доказательство.** Предельное значение биномиальных вероятностей легко получить, если представить их в виде

$$P\{X = x | n, p\} = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\lambda^x}{x!}$$

и воспользоваться замечательным пределом  $(1 - \lambda/n)^n \rightarrow e^{-\lambda}$ .

Этот асимптотический результат впервые был получен Пуассоном, и поэтому распределение вероятностей

$$P(X = x | \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

называется *распределением Пуассона* и обозначается  $P(\lambda)$ . Правая часть (1) представляет ненулевые значения функции плотности  $f(x | \lambda)$  распределения Пуассона,  $\lambda$  ( $> 0$ ) называется параметром *интенсивности потока Пуассона* – в терминах задачи с радиоактивным распадом  $\lambda$  равно среднему числу атомов, распавшихся за единицу времени. Функция распределения Пуассона равна нулю на отрицательной полуоси, а на положительной возрастает скачками в целочисленных точках  $x = 0, 1, \dots$ , величина которых равна правой части (1).

Трудно переоценить значимость закона Пуассона в различных проблемах естествознания. Это распределение используется при исследовании числа несчастных случаев на предприятиях, числа вызовов на телефонной



станции; этому закону подчиняются метеорные явления, потоки транспорта, размеры очередей систем обслуживания и пр.

**Равномерное распределение**  $U(a, b)$ . На отрезок  $[0; 1]$  “наугад” бросается точка, так что вероятность ее попадания в любой интервал  $(\alpha; \beta) \in [0; 1]$  зависит только от длины  $\beta - \alpha$  интервала и не зависит от его положения внутри отрезка  $[0; 1]$ . Экспериментатора интересует распределение случайной величины  $X$ , реализующей координату  $x$  точки после бросания.

Ключ к выводу функции распределения  $X$  указывает следующая эквивалентная формулировка условий эксперимента: интервалы одинаковой длины обладают одинаковой вероятностью попадания в них бросаемой точки. Если разделить отрезок  $[0; 1]$  на  $n$  одинаковых частей, то для функции распределения  $X$  имеет место двусторонняя оценка:

$$\frac{[nx]}{n} \leq F(x) \leq \frac{[nx] + 1}{n},$$

где  $[t]$  – целая часть  $t$ . Действительно, всем отрезкам, полученным в результате деления  $[0; 1]$ , соответствует одинаковая вероятность, равная  $1/n$  попадания в них точки, так что вероятность  $P(X < x) = F(x)$  можно оценить количеством отрезков длины  $1/n$ , покрывающих  $[0; x]$ . Устремляя теперь  $n$  к бесконечности, получаем, что  $F(x) = x$ , если  $x \in [0; 1]$ . Поскольку вероятность попадания точки во внешность отрезка  $[0; 1]$  равна нулю, то  $F(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $F(x) = 1$  при  $x > 1$ .

Итак, мы построили вероятностную модель равномерного распределения  $U(0, 1)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Легко понять, что если аналогичный эксперимент проводится с отрезком  $[0, b]$ , то функция распределения на этом отрезке будет иметь вид  $F(x) = x/b$ , так как свойство линейности должно сохраняться в силу принципа случайности бросания точки на отрезок  $[0, b]$ , и, в то же время,  $F(b+) = 1$ . Наконец, если точка бросается на отрезок общего вида  $[a, b]$ , то  $F(a) = 0$ ,  $F(b+) = 1$ , и поэтому  $F(x) = (x - a)/(b - a)$ . Таким образом, мы пришли к равномерному распределению  $U(a, b)$  на отрезке  $[a, b]$ . Это распределение зависит от двумерного параметра  $\theta = (a, b)$  с областью значений (параметрическим пространством)  $\Theta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$ .

Равномерное распределение имеет интересную связь с последовательностью испытаний Бернулли. Если представить реализацию  $x$  случайной величины  $X$  с распределением  $U(0, 1)$  в виде двоичной дроби, то ее дробная часть реализует последовательность индикаторов успеха в бесконечной

последовательности испытаний Бернулли с  $p = 1/2$ . Легко проверить, что справедливо и обратное утверждение, что дает один из простейших способов генерирования случайных величин с равномерным законом распределения.

## Лекция 8

**Показательное распределение**  $E(\theta)$ . Вы, наверное, обратили внимание, что большинство, по крайней мере, “серьезных” изделий, которые выпускают предприятия, снабжается гарантийным сроком службы  $t_0$ , и если изделие отказывает до момента  $t_0$ , то предприятие несет определенные убытки, связанные с ремонтом или заменой изделия. Естественно, долговечность  $x$  (или, как говорят англичане, “срок жизни” – lifetime) является реализацией случайной величины  $X$ , и только знание ее функции распределения  $F(x)$  позволит предприятию установить тот гарантийный срок службы, который отвечает его финансовым возможностям по обеспечению ремонта или замены. Для расчета  $t_0$  необходимо определиться с требуемой надежностью изделия  $P_0$  – “средней” долей изделий, которые обязаны отработать гарантийное время. Зная надежность  $P_0$ , мы находим гарантийный срок  $t_0$  из уравнения  $P(X \geq t_0) = 1 - F(t_0) = P_0$ . В связи с этим функция  $H(t) = 1 - F(t)$ ,  $t \geq 0$ , называется *функцией надежности*.

Обычно построение модели надежности изделия опирается на некоторые постулаты, связанные с функционированием изделия, его старением, износом, подверженностью ударным нагрузкам и т.п. Мы рассмотрим сейчас один из таких постулатов применительно к изделиям, которые отказывают не в силу процессов старения, а только по причине резко возросших (так называемых “ударных”) нагрузок на режим его работы. Естественно, в такой ситуации вероятность того, что изделие прослужит еще некоторое время  $t$  при условии, что оно уже отслужило срок  $s$ , не должна зависеть от  $s$ , то есть

$$P\{X \geq t + s \mid X \geq s\} = \frac{P(\{X \geq t + s\} \cap \{X \geq s\})}{P(X \geq s)} =$$

$$\frac{P(X \geq t + s)}{P(X \geq s)} = P(X \geq t).$$

Таким образом, функция надежности  $H(t)$  изделия должна удовлетворять функциональному уравнению

$$H(t + s) = H(t)H(s), \quad t \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (2)$$

**Предложение 5.2.** Если функция  $H(t)$ ,  $t \geq 0$  удовлетворяет краевым условиям  $\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$  и непрерывна слева, то все решения уравнения (2) имеют вид

$$H(t) = e^{-\lambda t},$$

где  $\lambda > 0$  – произвольный параметр.

Доказательство. Из уравнения (2) легко вывести, что для любого  $c > 0$  и любого целого  $n \geq 1$  имеет место соотношение

$$H(nc) = H^n(c). \quad (3)$$

Действительно, в силу (2), используя индукцию, получаем  $H(nc) = H((n-1)c + c) = H((n-1)c)H(c) = H((n-2)c)H^2(c) = \dots = H^n(c)$ .

Далее, для любых  $c > 0$  и целого  $m \geq 1$  справедливо равенство

$$H\left(\frac{c}{m}\right) = H^{1/m}(c), \quad (4)$$

которое немедленно следует из (3):  $H(c) = H(mc/m) = H^m(c/m)$ .

Соотношения (3) и (4) позволяют установить строгое неравенство  $0 < H(1) < 1$ . Действительно, если допустить противное:  $H(1) = 0$ , то в силу (4) для любого целого  $m \geq 1$  получаем  $H(1/m) = H^{1/m}(1) = 0$ . Устремляя  $m$  к бесконечности и используя свойство непрерывности  $H$  в нуле, получаем противоречие  $1 = H(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} H(1/m) = 0$ . Аналогично, если предположить, что  $H(1) = 1$ , то, в силу (3), для любого целого  $n$   $H(n) = H^n(1) = 1$  и, в то же время,  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = 0$ .

Неравенство  $0 < H(1) < 1$  означает, что существует такое  $\lambda > 0$ , что  $H(1) = e^{-\lambda}$ . Но тогда, в силу (3) и (4), для любых целых  $n$  и  $m$  имеем  $H(n) = e^{-n\lambda}$ ,  $H(n/m) = H^{1/m}(n) = \exp\{-n\lambda/m\}$ . Это означает, что наше предположение доказано для всех рациональных  $t$ . Любое другое значение  $t$  на положительной полуоси можно сколь угодно точно оценить снизу рациональным числом и затем воспользоваться непрерывностью слева  $H(t)$  при переходе в оценке  $t$  к пределу.

Итак, мы нашли функцию распределения случайной величины  $X$ , реализующую долговечность изделия,  $F(x) = 1 - H(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$  в области  $x > 0$ . Как будет показано в дальнейшем, это распределение тесно

связано с распределением Пуассона и параметр  $\lambda$ , как и в модели  $P(\lambda)$ , характеризует *интенсивность потока отказов*. Однако в теории вероятностей обычно модель показательного распределения параметризуется иным способом, через параметр  $\theta = 1/\lambda$ , который имеет смысл средней долговечности. Таким образом, показательное распределение  $E(\theta)$ , которое будет в дальнейшем рассматриваться, имеет функцию распределения  $F(x) = 0$  при  $x \leq 0$  и  $F(x) = 1 - \exp\{-x/\theta\}$ , если  $x > 0$ .

Мы завершим этот параграф построением еще одной дискретной модели теории надежности, в которой прослеживаются первые, пока еще очень смутные, связи пуассоновского и показательного распределений.

**Геометрическое распределение  $Geo(p)$ .** При посадке воздушного лайнера возможен сильный удар о посадочную полосу, который может привести к разрушению шасси. Пусть  $p$  – вероятность грубой посадки; нас интересует вероятность того, что шасси не будет разрушено до момента  $t$  ( $\gg 1$ ) (надежность шасси).

С подобной задачей мы имели дело в §1 (пример 6), когда определяли вероятность первого появления герба при  $n$ -ом испытании правильной монеты ( $p = 1/2$ ). В данном, более общем случае естественно воспользоваться предположением о независимости ситуаций, возникающих при каждой посадке лайнера. Пусть  $X$  – случайная величина, принимающая значения  $x = 1, 2, \dots$ , которые указывают момент разрушения шасси, точнее, номер посадки, которая оказалась грубой. Тогда событие  $X = x$  состоит из  $x - 1$  благополучных посадок и грубой посадки с номером  $x$ , откуда находим функцию плотности *геометрического* распределения  $Geo(p)$ :

$$f(x | p) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p,$$

если  $x \in \mathbb{N}$ , и  $f(x | p) = 0$  в остальных точках вещественной оси  $\mathbb{R}$ .

В дискретной функции надежности

$$H(t) = P(X \geq t) = \sum_{x=t}^{\infty} (1 - p)^{x-1}p = (1 - p)^{t-1}, t \geq 1$$

практический интерес представляют очевидно малые значения  $p$  и большие значения  $t$ . Найдем асимптотику  $H(t)$ , положив  $p = \lambda/N$ ,  $t = Nx$  и устремив  $N$  к бесконечности. Имеем

$$H(Nx) = \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{Nx-1} \rightarrow e^{-\lambda x}.$$

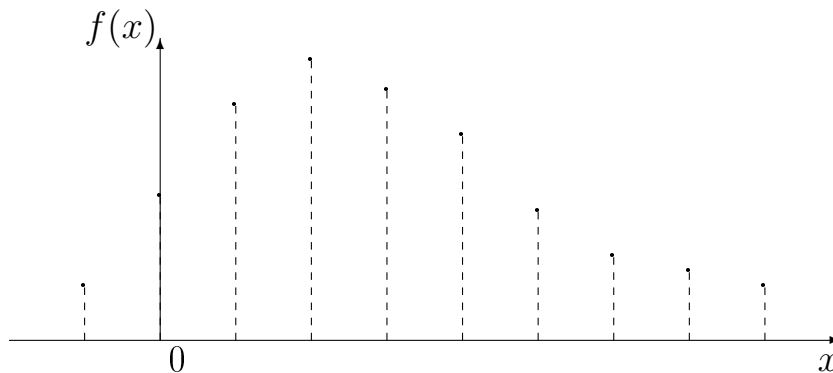
Итак, асимптотический анализ  $H(t)$ , аналогичный теореме Пуассона, привел нас к функции надежности показательного распределения.

Для того чтобы строить новые вероятностные модели, нам необходимо ближе познакомиться с числовыми и функциональными характеристиками распределений, которые постоянно используются на практике, когда возникает проблема сравнения распределений или характеристика их специфических особенностей. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

## §6. Характеристики распределения случайной величины. Классификация распределений

Мы построили шесть вероятностных моделей, и если пред нами стоит задача их классификации, то первая очевидная особенность, которой обладает каждое из распределений соответствующей случайной величины, это – непрерывность или разрывность функции распределения. Полученные семейства распределений можно разбить на два класса – *дискретный* и *непрерывный*.

Гипергеометрическое  $GG(N, M, n)$ , биномиальное  $B(n, p)$ , пуассоновское  $P(\lambda)$  и геометрическое  $Geo(p)$  распределения принадлежат к дискретному классу. При выводе этих распределений мы вполне могли бы ограничиться техникой элементарной теории вероятностей, поскольку пространства элементарных исходов (значений случайной величины  $X$ ) состояли из конечного или счетного числа точек, и функции плотности  $f(x | \theta)$  в области их ненулевых значений определяли вероятности каждого элементарного исхода  $X = x$ . Графическое изображение  $f(x) = f(x | \theta)$  как функции  $x$  при каждом фиксированном  $\theta$  позволяет наиболее полно представить картину общего распределения вероятностей и, одновременно, вызывает некоторые ассоциации с “нагруженным стержнем”, а также стремление характеризовать распределение масс по стержню такими механическими характеристиками, как центр тяжести, момент инерции, асимметрия и эксцесс в распределении масс и пр.



Прибегая к такой “механической” интерпретации распределения вероятностей, мы соотносим вероятность события  $X \in B$  при любом  $B \in \mathcal{B}$  с массой участка стержня  $B$  и вычисляем величину этой массы по формуле

$$P(B) = \sum_{x \in B} f(x).$$

Центр тяжести нагруженного стержня называется *средним значением* случайной величины  $X$ , обозначается  $\mathbf{E}X$  и вычисляется как

$$\mathbf{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x).$$

Момент инерции относительно точки  $\mu = \mathbf{E}X$ , равный

$$\mathbf{D}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x),$$

характеризует меру разброса (удаленности) отдельных точек нагружения от центра масс, и поэтому в теории вероятностей называется *дисперсией* случайной величины  $X$ . Кроме стандартного обозначения  $\mathbf{D}X$ , за величиной дисперсии закреплен символ  $\sigma^2$ , в то время как квадратный корень из дисперсии  $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}X}$  называется *стандартным отклонением*  $X$ .

Несомненный практический интерес представляет также точка достижения максимума функции  $f(x)$ , как наиболее вероятного значения  $X$ . Эта точка называется *модой* распределения  $X$ , и как-то так сложилось, что стандартного, наиболее распространенного обозначения у этой характеристики нет, разве лишь  $\text{mod}(X)$ .

Мы не будем торопиться с введением других характеристик распределения  $X$ , а также иллюстрировать вычисления  $\mathbf{E}X$ ,  $\mathbf{D}X$  и  $\text{mod}(X)$  на конкретных распределениях, и сначала попытаемся ввести аналоги этих характеристик для случайных величин с непрерывной функцией распределения.

К классу непрерывных распределений принадлежат равномерное  $U(a,b)$  и показательное  $E(\theta)$  распределения. При построении этих вероятностных моделей функция распределения играла определяющую роль и теорема 4.1 использовалась по существу.

Графическое изображение непрерывной функции распределения вряд ли стоит рассматривать как столь же наглядную иллюстрацию распределения вероятностей, как, например, график функции плотности (функции скачков) распределения дискретного типа. Это замечание в равной степени относится как к дискретному, так и непрерывному классу распределений. Графики возрастающих функций с областью значений в интервале  $[0; 1]$  так похожи друг на друга, что их главная примечательность – точки перегиба – “на глаз” определяются только при высоких художественных достоинствах графического изображения. Другое дело – производная функции, где эти точки перегиба превращаются в точки экстремума. С другой

стороны, производная функции распределения в непрерывном случае, так же как и функция скачков дискретного распределения, допускает механическую интерпретацию функции плотности единичной массы, “размазанной” по бесконечному стержню, и в рамках этой интерпретации мы снова можем рассматривать такие характеристики, как центр тяжести, момент инерции и тому подобное.

Итак, определим *функцию плотности* непрерывного распределения  $F(x)$  как производную  $f(x) = dF(x)/dx$ , которая в нашем случае определяется почти всюду по мере Лебега, что, как будет в дальнейшем, вполне достаточно для вычисления характеристик непрерывного распределения. Так, для равномерного распределения  $f(x) = f(x|\theta) = 0$  равна нулю вне сегмента  $[a; b]$  и  $f(x|\theta) = (b-a)^{-1}$ , то есть постоянна на этом сегменте. В случае показательного распределения  $f(x|\theta) = 0$  при  $x < 0$ ,

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\},$$

если  $x \geq 0$ , и отнесение точки  $x = 0$  к области нулевых значений функции  $f$  очевидно не изменит значений интегральных характеристик распределения; аналогичное заключение можно сделать и относительно конечных точек  $a$  и  $b$  равномерного распределения  $U(a, b)$ .

Функция распределения из непрерывного класса выражается через свою функцию плотности в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

а вероятность “попадания”  $X$  в некоторое произвольное борелевское множество  $B$  (вероятность события  $B$ ) записывается как

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{I}_B(x)f(x)dx,$$

где  $\mathbf{I}_B(x)$  – индикаторная функция множества  $B$ . Естественно, в силу явной нерегулярности (разрывности и прочих пакостей) подынтегральных функций интегралы в этих формулах следует рассматривать как интегралы Лебега по лебеговой мере  $dx$  на борелевской прямой  $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ .

Центр тяжести стержня с непрерывным распределением масс, которое определяется функцией плотности  $f(x)$ , вычисляется по известной форму-



ле

$$\mu = \mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

и называется, как и в дискретном случае, *средним значением* случайной величины  $X$ . Точно так же момент инерции

$$\sigma^2 = \mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

называется *дисперсией*  $X$ , а  $\sigma$  – *стандартным отклонением*. Наконец, точка достижения максимума функции плотности:

$$\text{mod}(X) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) -$$

*модой* распределения  $X$ . Окрестность точки  $\text{mod}(X)$  обладает наибольшей концентрацией вероятностной массы.

## Лекция 9

Естественно, рассмотрев два основных класса распределений, мы могли бы теперь продолжить изучение характеристик распределений каждого типа, но возникает естественный вопрос, а существуют ли смешанные дискретно-непрерывные распределения или вообще распределения, не принадлежащие к изученным классам, и как тогда вычислять их средние значения и дисперсии?

Что касается дискретно-непрерывных распределений, то о существовании и практической ценности таких распределений указывает следующая вероятностная модель теории надежности. Предположим, что предприятие выпускает изделия с показательным распределением долговечности, но в силу специфических дефектов производства каждое изделие с некоторой вероятностью  $p$  может быть “мертворожденным”, то есть отказать при его “включении”. В таком случае функция распределения долговечности в области  $x > 0$  имеет вид (используется формула полной вероятности)  $F(x) = p + (1 - p)(1 - \exp\{-x/\theta\})$ , а средний срок службы

$$\mathbf{E}X = 0 \cdot p + (1 - p)\theta^{-1} \int_0^{\infty} x \exp\{-x/\theta\} dx = (1 - p)\theta -$$

опять новая формула для вычисления характеристик распределения  $X$ !

Дальше – больше, оказывается существует еще один тип распределений, вычисление характеристик которого вообще невычислимо вне рамок теории интеграла Лебега. Помните, мы говорили с вами о связи между схемой испытаний Бернулли с вероятностью успешного испытания  $p = 1/2$  и равномерным распределением на отрезке  $[0, 1]$ ? Оказывается, если вероятность успеха  $p \neq 1/2$ , то двоичная дробь, составленная из реализаций индикаторов успеха, представляет результат наблюдения случайной величины с весьма загадочной функцией распределения. Во-первых, эта функция почти всюду постоянна – производная от нее почти всюду по мере Лебега на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  равна нулю. Тем не менее эта функция возрастает, непрерывна(!), но точки ее роста составляют счетное множество, имеющее, естественно, нулевую лебегову меру. Соответствующая этой функции распределения вероятностная мера  $P$  на борелевской прямой сингулярна относительно меры Лебега: если множество  $B \in \mathcal{B}$  имеет нулевую лебегову меру, то отсюда не следует, что  $P(B) = 0$ .

Распределения такого вида, имеющие непрерывную функцию распределения, но сингулярные по отношению к мере Лебега, составляют класс *сингулярных* распределений. Легко понять, что явная запись таких распределений вряд ли возможна. В нашем примере с построением реализаций случайной величины  $X$  с помощью схемы Бернулли для функции распределения  $X$  составляется некоторое операторное уравнение, и если мы хотим рассчитать вероятности попадания  $X$  в интервалы на прямой, то придется использовать численные методы решения таких уравнений. Конечно, мы не будем заниматься сейчас выводом уравнения, определяющего сингулярную функцию распределения – это слишком трудоемкая задача, для решения которой у нас нет времени.

Итак, мы рассмотрели три типа распределений: дискретный, непрерывный и сингулярный. Удивительно то, что других типов не существует, о чем свидетельствует знаменитая

**Теорема Лебега.** *Любая функция распределения представима в виде суммы трех неотрицательных, неубывающих функций, одна из которых абсолютно непрерывна и имеет неотрицательную производную на множестве положительной лебеговой меры; вторая является ступенчатой и обладает не более чем счетным множеством точек разрыва (скачков); третья непрерывна, но имеет не более чем счетное множество точек роста.*

Доказательство этой теоремы выходит из рамок нашего общего курса теории вероятностей. В не столь отдаленные времена, когда в университете занимались преподаванием фундаментальных наук, а не обучением примитивному ремеслу, теорема Лебега доказывалась в общем курсе математического анализа. Из теоремы Лебега вытекает, что в чистом виде существует только три типа распределений, из которых два (непрерывный и дискретный) нам знакомы, а третий – сингулярный – загадочен, и мы пока не в состоянии представить себе, каким образом вычислять интеграл Лебега,

$$\mathbf{E}X = \int_{\mathbb{R}} x dP(x),$$

определяющий среднее значение случайной величины  $X$  с сингулярным распределением вероятностей  $P(B)$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ .

Спешу обрадовать вас, что мы не будем рассматривать сингулярные вероятностные модели. Тем не менее существует весьма общий подход к определению *функции плотности* для любого, в том числе и смешанного, типов распределений, опираясь на который можно предложить некоторый общий метод определения и вычисления характеристик распределений различных типов. Этот подход указывает следующая, не менее знаменитая, чем теорема Лебега,

**Теорема Радона–Никодима.** Пусть на борелевской прямой  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  заданы вероятность  $P$  и сигма-конечная мера  $\mu$ , причем  $P$  абсолютно непрерывна относительно  $\mu$ , то есть  $\mu(B) = 0$  влечет  $P(B) = 0$ . Тогда для почти всех по мере  $\mu$  точек  $x \in \mathbb{R}$  существует такая единственная функция  $f(x)$ , что

$$P(B) = \int_B f(x) d\mu(x), \quad \forall B \in \mathfrak{B}. \quad (1)$$

Эта теорема, доказательство которой мы также опускаем (и не потому, что времени нет, а просто – знаний не хватает), позволяет ввести одно из центральных понятий теории вероятностей, постоянно используемое при построении вероятностных моделей.

**Определение 6.1.** Функция  $f(x)$ , определяемая соотношением (1) для почти всех по мере  $\mu$  точек  $x \in \mathbb{R}$ , называется *функцией плотности* распределения вероятностей  $P$  по мере  $\mu$ . Эта функция называется также *про-*

изводной Радона–Никодима меры  $P$  по мере  $\mu$ , и имеет место символическая запись  $f(x) = dP/d\mu$ .

В рамках этого определения, введенная выше функция плотности непрерывного распределения есть производная Радона–Никодима вероятности  $P$  по мере Лебега  $d\mu = dx$  на борелевской прямой. Так как вероятность  $P$  в соответствии с теоремой 4.1 определялась с помощью функции распределения  $F(x)$ , то мы использовали тот вариант производной Радона–Никодима, который совпадает с обычной производной функции  $F(x)$ , доопределяя эту функцию в точках, где производная не существует, таким образом, чтобы не возникали дополнительные разрывы. Что же касается дискретного случая, то здесь мы использовали производную Радона–Никодима по *считающей мере*  $\mu$  : для любого  $B \in \mathcal{B}$  мера  $\mu(B)$  равна количеству точек с целочисленными координатами, которые принадлежат  $B$ . Например, борелевское множество  $B = [-2.5; 5]$  содержит восемь точек с целочисленными координатами  $-2, -1, 0, \dots, 5$ , и поэтому  $\mu(B) = 8$ . В “дробных” точках  $x \in \mathbb{R}$  мы полагали  $f(x) = 0$ , хотя могли бы выбирать любые другие значения при вычислении вероятностей по формуле (1). Дело в том, что при интегрировании по дискретной считающей мере интеграл Лебега от любой функции превращается в сумму значений этой функции в целочисленных точках, и (1) принимает известный нам из элементарной теории вероятностей вид

$$P(B) = \sum_{x \in B} P(X = x) = \sum_{x \in B} f(x).$$

Теперь мы обладаем общим подходом к определению характеристик распределения случайной величины  $X$ . Значительная часть из них определяется через интеграл Лебега по мере (вероятности)  $P$  от специально подобранных функций.

**Определение 6.2.** Пусть  $X$  – случайная величина с распределением  $P$  и  $f(x)$  – функция плотности  $P$  по сигма-конечной мере  $\mu$ . *Математическим ожиданием* любого измеримого отображения  $g(X)$  борелевской прямой в себя (измеримой функции от случайной величины  $X$ ) называется интеграл Лебега

$$\mathbf{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dP(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)d\mu(x).$$

В частности, *математическое ожидание случайной величины  $X$*  вычис-

ляется по формуле

$$\mathbf{E}X = \int_{\mathbf{R}} x dP(x) = \int_{\mathbf{R}} x f(x) d\mu(x).$$

**З а м е ч а н и е.** В отечественной литературе по теории вероятностей (например, в учебнике А.А.Боровкова “Теория вероятностей”) математическое ожидание обозначается латинской буквой **M** а не **E**.

**Моментные характеристики распределения случайной величины.** Математическое ожидание функции  $g(X) = (X - a)^k$  от случайной величины  $X$ , где  $k$  принимает только целочисленные значения  $1, 2, \dots$ , называется *моментом  $k$ -го порядка случайной величины  $X$  относительно точки  $a$* . Если  $a = 0$ , то  $\alpha_k = \mathbf{E}X^k$  называется просто *моментом  $k$ -го порядка* случайной величины  $X$ , а если  $a = \mathbf{E}X (= \alpha_1)$ , то момент  $\mu_k = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^k$  называется *центральный момент  $k$ -го порядка*. Иногда, во избежание недоразумений, моменты  $\alpha_k$  называются *нецентральными моментами*. Первый нецентральный момент  $\alpha_1 = \mathbf{E}X$  называется *средним значением* или *математическим ожиданием* случайной величины  $X$  и обозначается обычно буквой  $\mu$ . Вторым центральным моментом  $\mu_2 = \mathbf{E}(X - \mu)^2$  называется *дисперсией* случайной величины  $X$  и обозначается или буквой  $\sigma^2$ , или вводится оператор  $\mathbf{D}X$ . Напомним, что квадратный корень из дисперсии:  $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}X}$  мы договорились называть *стандартным отклонением*  $X$ . Поскольку  $\sigma$  имеет ту же размерность, что и наблюдаемая случайная величина  $X$ , то в практических приложениях в качестве меры “разброса” вероятностей используется обычно стандартное отклонение  $\sigma$ , а не дисперсия  $\sigma^2$ . Для среднего и дисперсии  $X$  справедливо

**Предложение 6.1.** *Среднее значение  $\mathbf{E}X$  и дисперсия  $\mathbf{D}X$  обладают следующими свойствами:*

$$1^0. \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}X + b \text{ для любых постоянных } a, b \in \mathbf{R},$$

2<sup>0</sup>.  $\mathbf{D}(aX + b) = a^2\mathbf{D}X$  для любых постоянных  $a, b \in \mathbf{R}$ , то есть дисперсия инвариантна относительно сдвигов случайной величины  $X$  на постоянную величину;

$$3^0. \mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \alpha_2 - \mu^2,$$

$$4^0. \inf_{a \in \mathbf{R}} \mathbf{E}(X - a)^2 = \mathbf{D}X, \text{ то есть } \arg \inf_{a \in \mathbf{R}} \mathbf{E}(X - a)^2 = \mathbf{E}X.$$

**Доказательство.**

1<sup>0</sup>. Данное утверждение есть простая констатация известного свойства линейности интеграла Лебега.

$$2^0. \mathbf{D}(aX + b) = \mathbf{E}(aX + b - a\mu - b)^2 = a^2\mathbf{E}(X - \mu)^2 = a^2\mathbf{D}X.$$

$$3^0. \mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X^2 - 2X\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2) = \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2.$$

$$4^0. \mathbf{E}(X - a)^2 = \mathbf{E}((X - \mu) - (a - \mu))^2 = \mathbf{E}((X - \mu)^2 - 2(a - \mu)(X - \mu) + (a - \mu)^2) = \mathbf{E}(X - \mu)^2 - 2(a - \mu)\mathbf{E}(X - \mu) + (a - \mu)^2 = \mathbf{D}X + (a - \mu)^2 \geq \mathbf{D}X, \text{ причем равенство достигается тогда и только тогда, когда } a = \mu = \mathbf{E}X.$$

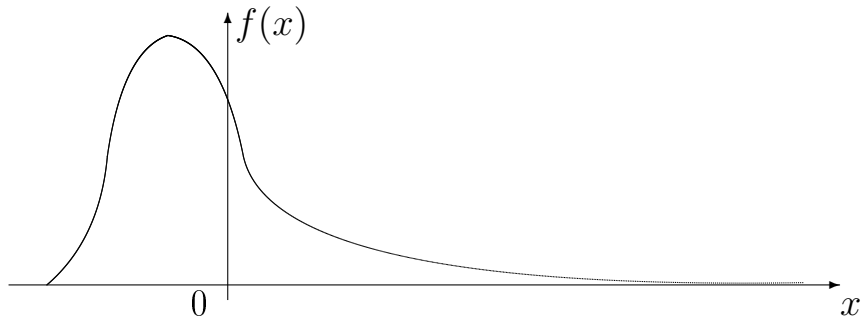
С моментами случайной величины  $X$  связаны две замечательные *характеристики формы* распределения  $X$  :

$$\text{коэффициент асимметрии } \gamma_1 = \mu_3/\sigma^3, \text{ и}$$

$$\text{коэффициент эксцесса } \gamma_2 = \mu_4/\sigma^4 - 3.$$

Легко заметить по аналогии с доказательством пункта 2<sup>0</sup> предыдущего предложения, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  *инвариантны относительно линейных преобразований случайных величин*, то есть  $X$  и  $aX + b$  имеют одинаковые коэффициенты асимметрии и эксцесса при любых постоянных  $a$  и  $b$ .

Как и выше, мы будем называть *модой* распределения случайной величины  $X$  любую точку  $\text{mod}(X)$  достижения локального максимума у функции плотности  $f(x)$ . Если мода единственна, то говорят, что распределение  $X$  *унимодално*. Когда график унимодалной кривой плотности имеет “длинный хвост” справа от моды (см. рисунок на этой странице), то в выражении  $\mu_3$  кубы положительных отклонений перевесят отрицательные кубы, и коэффициент асимметрии  $\gamma_1$  будет положителен. Если же мода “свалена” вправо (длинный хвост слева от моды), то  $\gamma_1 < 0$ . Распределения с симметричной функцией плотности, как, например, биномиальное с  $p = 1/2$  или равномерное  $U(a,b)$ , обладают нулевой асимметрией:  $\gamma_1 = 0$ .



Что же касается коэффициента эксцесса  $\gamma_2$ , то его подлинный смысл мы поймем после знакомства в следующем параграфе с *нормальным распределением* на борелевской прямой, а пока только отметим, что положительный эксцесс говорит об излишней “пикообразности” – вытянутости вверх кривой плотности, в то время как отрицательное значение  $\gamma_2$  указывает на более плоский характер вершины кривой плотности.

## Лекция 10

Прежде чем перейти к примерам по вычислению моментных характеристик случайных величин, следует обратить внимание на то, что в рассмотренных нами вероятностных моделях существуют довольно крупные элементы, имеющие нулевую вероятность, например, во всех моделях  $P(X \in (-\infty, 0)) = 0$ . В связи с этим вводится понятие *носителя* распределения случайной величины, как замыкания множества  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ . Такое определение носителя не является достаточно общим и связано с мерой  $\mu$ , по которой вычисляется плотность  $f(x)$ , но поскольку мы договорились рассматривать только дискретные и непрерывные распределения ( $\mu$  – считающая мера или мера Лебега), то такое определение вполне работоспособно и позволяет легко найти носитель любого из шести известных нам распределений. Носитель распределения будет обозначаться рукописной буквой  $\mathcal{X}$ . Нетрудно понять, что при вычислении моментных и прочих интегральных характеристик распределения из области интегрирования можно убрать все точки, не принадлежащие  $\mathcal{X}$ , и при этом величина характеристики останется неизменной.

**Пример 6.1** (*биномиальное распределение  $B(n, p)$* ). Носитель этого распределения  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}$ . Для вычисления первых двух моментов биномиального распределения воспользуемся методом “дифференцирова-

ния по параметру” и формулой бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = (a + b)^n.$$

По определению среднего значения

$$\begin{aligned} \mu = \mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = p \left[ \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-p)^{n-k} \right]_{x=p} = \\ &= p \left[ \frac{d}{dx} (x+1-p)^n \right]_{x=p} = pn(x+1-p)^{n-1} \Big|_{x=p} = np. \end{aligned}$$

Второй момент

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \mathbf{E}X^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = p \left[ \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-p)^{n-k} \right]_{x=p} = \\ &= p \left[ \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} (x+1-p)^n \right]_{x=p} = p \left[ \frac{d}{dx} xn(x+1-p)^{n-1} \right]_{x=p} = \\ &= np \left[ (x+1-p)^{n-1} + x(n-1)(x+1-p)^{n-2} \right]_{x=p} = np(1-p) + (np)^2, \end{aligned}$$

откуда дисперсия биномиального распределения  $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = np(1-p)$ .

С помощью аналогичных, но более утомительных выкладок можно найти третий и четвертый моменты, а также коэффициенты асимметрии и эксцесса

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad \gamma_2 = \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}.$$

Следовательно, биномиальное распределение “свалено” влево (– хвост справа длиннее) при  $p < 1/2$ , симметрично, как нам было известно ранее, при  $p = 1/2$  и “свалено” вправо при  $p > 1/2$ . Коэффициент эксцесса положителен в области  $p(1-p) < 1/6$ , а наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение  $\gamma_2 = -2/n$ , когда  $p = 1/2$ .

Мода  $B(n, p)$  определяется как целочисленное  $x$ , при котором происходит смена неравенства  $f(x | n, p) < f(x+1 | n, p)$  на обратное. Нетрудно убедиться, что это неравенство эквивалентно  $x+1 < p(n+1)$ , так что  $\text{mod}(X)$  определяется через сравнение значений  $f(x | n, p)$  при целых  $x \geq 0$ , ближайших к  $p(n+1)$ .



Пример 6.2 (*распределение Пуассона*  $P(\lambda)$ ). Носитель распределения  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, \infty\}$  – точка  $x = \infty$  должна быть включена в носитель по требованию замыкания множества вероятности единица. Моментные характеристики пуассоновского распределения можно рассчитать, используя тот же метод дифференцирования по параметру, но проще, вспомнив, что  $P(\lambda)$  есть предел  $B(n, p)$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  и  $np = \lambda$ , перейти к этому пределу в моментных характеристиках биномиального распределения. В результате получаем

$$\mathbf{E}X = \mathbf{D}X = \lambda, \quad \gamma_1 = \lambda^{-1/2}, \quad \gamma_2 = \lambda^{-1},$$

а  $\text{mod}(X) = [\lambda]$ , поскольку асимметрия  $P(\lambda)$  всегда положительна и график  $f(x | \lambda)$  “свален” влево.

Следует обратить особое внимание на то, что у распределения Пуассона дисперсия совпадает со средним значением:  $\mu = \sigma^2 = \lambda$ .

Пример 6.3 (*равномерное распределение*  $U(a, b)$ ). Носитель распределения  $\mathcal{X} = [a; b]$ . Модой распределения является любая точка интервала  $(a, b)$ , поскольку плотность  $f(x) = (b - a)^{-1}$  постоянна на этом интервале.

Нетрудно убедиться, что если случайная величина  $X$  имеет распределение  $U(0, 1)$ , то  $Y = (b - a)X + a$ ,  $b > a$ , распределена как  $U(a, b)$ . Это вытекает из-за следующего соотношения между функциями распределения случайных величин:  $P(Y < x) = P((b - a)X + a < x) = P(X < (x - a)/(b - a)) = (x - a)/(b - a)$ . В силу этого для вычисления моментных характеристик  $U(a, b)$  достаточно найти соответствующие характеристики  $U(0, 1)$  и затем воспользоваться предложением 6.1.

Для распределения  $U(0, 1)$  имеем

$$\mu = \mathbf{E}X = \int_0^1 x dx = 1/2, \quad \alpha_2 = \int_0^1 x^2 dx = 1/3,$$

откуда дисперсия  $\sigma^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$ . Следовательно, для распределения  $U(a, b)$  (см. предложение 6.1)  $\mu = a + (b - a)/2$ ,  $\sigma^2 = (b - a)^2/12$ .

Симметричное равномерное распределение  $U(a, b)$  имеет нулевой коэффициент асимметрии, в то время как коэффициент эксцесса  $\gamma_2$  отрицателен (не будем заниматься его вычислением).

Пример 6.4 (*показательное распределение*  $E(\theta)$ ). Носитель распределения  $\mathcal{X} = [0, \infty]$  – расширенная положительная часть прямой  $\mathbb{R}$ . Наи-

большее значение плотности  $f(x) = \theta^{-1} \exp\{-x/\theta\}$  достигается в точке  $x = 0$ , поэтому  $\text{mod}(X) = 0$ .

Моменты показательного распределения

$$\alpha_k = \theta^{-1} \int_0^{\infty} x^k \exp\{-x/\theta\} dx = \theta^k \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1)\theta^k = k!\theta^k,$$

откуда  $\mu = \theta$ ,  $\sigma^2 = \theta^2$  и стандартное отклонение  $\sigma = \theta$  совпадает со средним значением.

Естественно, моментные характеристики далеко не универсальны, и можно привести примеры распределений, у которых существует ограниченное количество моментов, или не существует даже среднего значения. Мы приведем два из таких распределений, одно из которых может представлять некоторый практический интерес, а другое будет использоваться для иллюстраций различных паталогий в теории статистического вывода; оба распределения занесутся в каталог вероятностных моделей.

**Распределение Парето**  $\text{Par}(a, \alpha)$ . Налоговые органы обычно интересуются распределением годовых доходов тех лиц, годовой доход которых превосходит некоторый предел  $a$ , установленный законами о налогообложении. Такого рода распределения иногда считают (к сожалению, без особого “экономического” обоснования) приближенно совпадающими с *распределением Парето*, вся вероятностная масса которого сосредоточена в области  $x > a$  (носитель распределения  $\mathcal{X} = [a, \infty]$ ), и функция распределения на сегменте  $\mathcal{X}$  равна

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha, \quad x > a, \quad \alpha > 0.$$

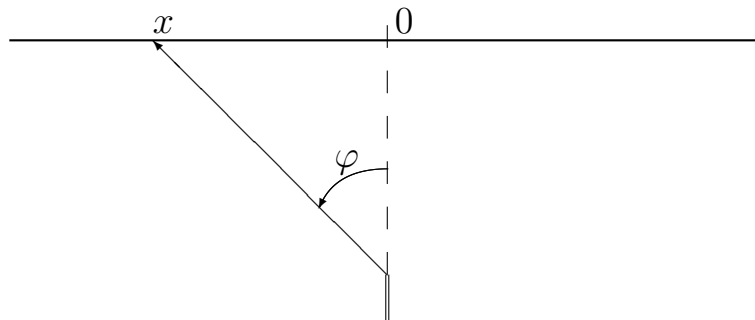
Это распределение, зависящее от двумерного параметра  $\theta = (a, \alpha)$  с параметрическим пространством  $\Theta = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ , принадлежит непрерывному типу; его функция плотности в области  $x > a$  равна

$$f(x | \theta) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1}.$$

Момент  $k$ -го порядка у распределения Парето существует только при значениях параметра  $\alpha > k$ , например, неравенство  $\alpha > 1$  гарантирует существование среднего значения, которое, как нетрудно подсчитать, равно  $\alpha a / (\alpha - 1)$ .

Если случайная величина  $X$  распределена по закону Парето, то, как легко видеть,  $\ln X$  имеет показательное распределение, “сдвинутое вправо” на величину  $\ln a$ , так как  $P(\ln X < x) = P(X < e^x) = F(e^x)$ . Это замечание объясняет, почему распределение Парето адекватно описывает распределение наблюдаемых доходов у лиц с высоким уровнем дохода. Вспомним постулат “отсутствия последствий”, приводящий к показательному распределению долговечности: вероятность того, что изделие прослужит промежуток времени, не меньший  $s$ , при условии, что оно уже отработало срок  $t$ , не зависит от величины  $t$ . В основу модели Парето положен тот же принцип, только в мультипликативной, а не в аддитивной, формулировке: *вероятность того, что доход отдельного лица увеличится не меньше, чем в  $s$  раз, при условии, что он уже достиг уровня  $t$ , не зависит от величины достигнутого уровня*. Это происходит, по-видимому, от того, что обладающий большими доходами стремится сохранить достигнутое положение и редко стремится вкладывать большие капиталы в новые отрасли с целью наращивания денежной массы. В таком случае изменчивость дохода за наблюдаемые периоды времени носит случайный характер и не связана с величиной капитала, которым располагают отдельные субъекты. В то же время у “предпринимателей” распределение доходов отлично от закона Парето. Это так называемое логарифмически нормальное распределение, с которым мы познакомимся несколько позже, освоив новые математические методы построения вероятностных моделей.

**Распределение Коши  $C(a, b)$ .** Орудие с вращающимся лафетом помещается на единичном расстоянии от стены, бесконечно уходящей в обе стороны.



Представим, что стена является действительной прямой  $\mathbb{R}$  с началом координат в основании перпендикуляра, опущенного из орудия на стену. Ствол орудия размещается параллельно стене с направлением выстрела в сторону отрицательной полуоси, лафет орудия начинает равномерно вра-

щаться по ходу часовой стрелки, и прежде, чем ствол займет первое положение параллельное стене, в случайный момент времени происходит выстрел. Экспериментатора интересует распределение случайной величины  $X$ , реализация  $x$  которой совпадает с координатой точки попадания снаряда.

Пусть  $\varphi$  – случайная величина, соответствующая величине угла, между перпендикуляром к стене и положением ствола в момент выстрела. Нам будет удобнее измерять  $\varphi$  в пределах  $[-\pi/2; \pi/2]$  и трактовать предположение о случайном моменте выстрела в терминах равномерного распределения  $\varphi$  на этом сегменте. Следовательно, функция распределения  $\varphi$  при  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  равна  $F(x) = (x + \pi/2)\pi^{-1}$ . Очевидно, координата точки попадания (см. рисунок)  $X = \operatorname{tg} \varphi$ , откуда искомая функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\operatorname{tg} \varphi < x) = P(\varphi < \operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

а функция плотности

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

Сдвиг вправо на параметр  $a$  и выбор масштабного параметра  $b$  определяет то распределение, которому мы присвоим имя Коши и будем обозначать  $C(a, b)$ ; его функция плотности

$$f(x | a, b) = \frac{1}{\pi b} \left[ 1 + \left( \frac{x - a}{b} \right)^2 \right]^{-1},$$

носителем распределения является расширенная числовая прямая  $\mathcal{X} = \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ .

Легко видеть, что распределение Коши не обладает даже конечным средним значением, не говоря о моментах более высокого порядка. Однако это распределение симметрично и имеет ярко выраженную моду,  $\operatorname{mod}(X) = a$ , которая с успехом заменяет среднее значение, как характеристику положения центра масс. В связи с этим полезно сделать замечание о среднем значении как характеристике положения: оно действительно играет свою роль только в случае симметричных распределений, но при больших абсолютных значениях  $\gamma_1$  среднее перестает быть полезной характеристикой распределения, в то время как мода “всегда хороша”.

Какие же характеристики используются при описании распределений, у которых отсутствуют моменты?

**Определение 6.3** Пусть функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  строго возрастает в области всех значений своего аргумента, для которых  $0 < F(x) < 1$ . Тогда для любого  $p \in (0; 1)$  корень  $x_p = F^{-1}(p)$  уравнения  $F(x) = p$  называется  $p$ -квантилью распределения  $X$ .

В том случае, когда  $F(x)$  непрерывна, но не строго монотонна, так что уравнение  $F(x) = p$  имеет много решений, в качестве  $p$ -квантили обычно берется наибольший или наименьший из корней этого уравнения, и выбор корня определяется существом рассматриваемой вероятностной проблемы. В случае же дискретного распределения это уравнение может вообще не иметь решений, и тогда в качестве  $p$ -квантили выбирается то значение  $x$ , для которого значение  $F(x)$  ближе всего к заданному  $p$ .

Квантиль считается характеристикой *положения*, и с этой точки зрения особого внимания заслуживает квантиль  $x_{0.5}$ , которая разделяет всю вероятностную массу на две одинаковые половинки. Эта квантиль носит название *медианы* распределения и обычно обозначается буквой  $m$ . У симметричных распределений (биномиальное с вероятностью успешного испытания  $p = 1/2$ , равномерное и Коши) медиана совпадает с центром симметрии распределения, а при наличии среднего значения у симметричного распределения медиана  $m = \mathbf{E}X$ . Если  $p$  кратно 0.1, то квантиль называется *децилью*, а если  $p = 1/4$  или  $3/4$ , то – *квартилью*.

С квантилями связаны также несколько характеристик *рассеяния* распределения вероятностей. Очевидно, интервал  $(x_{1-p}; x_p)$  при достаточно близких к единице значениях  $p$  покрывает основную часть вероятностной массы, и поэтому разность  $x_p - x_{1-p}$ ,  $p > 1/2$ , служит характеристикой *толерантности* распределения случайной величины  $X$ . Если  $p = 3/4$ , то разность  $x_{3/4} - x_{1/4}$  называется *семиинтерквартильной шириной* распределения  $X$ .

## Лекция 11

Мы завершим этот параграф доказательством одного замечательного неравенства, играющего исключительную роль при доказательстве многих теорем (или, как часто говорят, “законов”) теории вероятностей. Это неравенство или, в большей степени, следствие из него связывает квантильные и моментные характеристики рассеяния распределения.

**Предложение 6.2** (неравенство Чебышева). Для любой неотрицательной измеримой функции  $g(x)$  и любого  $\varepsilon > 0$  имеет место неравенство

$$P(g(X) > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E} g(X)}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Если  $\mathbf{E} g(X) = +\infty$ , то неравенство тривиально. В случае конечного математического ожидания

$$\mathbf{E} g(X) = \int_{\mathbf{R}} g(x) dP(x) = \int_{g(x) < \varepsilon} g(x) dP(x) + \int_{g(x) \geq \varepsilon} g(x) dP(x).$$

Если в правой части этого равенства первое слагаемое заменить нулем (оно неотрицательно), а во втором слагаемом под интегралом вместо  $g(x)$  подставить его наименьшее значение  $\varepsilon$ , то получим оценку снизу

$$\mathbf{E} g(X) \geq \varepsilon \int_{g(x) > \varepsilon} dP(x) = \varepsilon P(g(X) > \varepsilon),$$

из которой немедленно следует неравенство Чебышева.

**Следствие 6.1.** Для любой случайной величины  $X$  с конечным средним значением  $\mathbf{E}X$  и любого  $\varepsilon > 0$  имеет место неравенство

$$P(|X - \mathbf{E}X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Доказательство. Если дисперсия  $X$  не существует (равна бесконечности), то утверждение следствия тривиально. В случае  $\mathbf{D}X < \infty$  достаточно заменить событие  $|X - \mathbf{E}X| > \varepsilon$  на эквивалентное  $|X - \mathbf{E}X|^2 > \varepsilon^2$  и применить неравенство Чебышева.

Доказанное неравенство часто используется на практике для универсальной характеристики толерантности распределений, обладающих конечным средним  $\mu$  и конечной дисперсией  $\sigma^2$ . Имеется в виду распространенное

**Правило трех сигм.** Интервал с концами  $\mu \pm 3\sigma$  содержит приблизительно 90% вероятностной массы распределения  $X$ .

Действительно, если в неравенстве (2) положить  $\varepsilon = 3\sigma$ , то получим:  $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 1 - P(|X - \mu| > 3\sigma) \geq 8/9 \approx 0.9$ .

Так как правило  $3\sigma$  носит универсальный характер, то оно дает в большинстве случаев слишком грубую оценку толерантности распределения. Например, можно доказать, что для симметричных распределений с конечным третьим моментом  $\mu_3$  справедливо *правило  $2\sigma$* : интервал с концами  $\mu \pm 2\sigma$  содержит 90% вероятностной массы распределения.

В дальнейшем, чтобы не писать длинные названия рассмотренных нами распределений, мы будем указывать распределение  $X$  посредством ссылки на символ этого распределения, используя при этом знак эквивалентности, например,  $X \sim B(n, p)$  означает, что  $X$  имеет биномиальное распределение.

## §7. Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли. Нормальное распределение

При выводе распределения Пуассона мы исследовали асимптотику биномиального распределения, когда  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $np = \lambda (const)$ . Существует, однако, широкий класс практических задач, в которых построение вероятностных моделей требует асимптотического анализа биномиального распределения при фиксированном  $p \in (0; 1)$  и  $n \rightarrow \infty$ .

**Пример 7.1** (*определение видимой звездной величины*). Наблюдения за изменением блеска небесных светил, в частности звезд, является одной из важнейших задач практической астрономии. Только с помощью анализа таких наблюдений можно обнаружить *переменные* звезды, поставляющие информацию о расстояниях до отдаленных светил (цефеиды), а также об их массах, размерах и пр. (затменные переменные и спектрально-двойные звезды).

Величина блеска звезды определяется так называемой *видимой звездной величиной* – характеристикой светимости, пропорциональной количеству квантов света, исходящих от звезды и достигших прибора (электрического фотометра, фотографической пластинки и т.п.), который регистрирует поток лучевой энергии. С точки зрения проблемы построения вероятностной модели изменчивости в повторных наблюдениях блеска, мы имеем ту же картину, что и при измерениях интенсивности радиоактивного источника: каждый квант света с определенной вероятностью  $p$  достигает регистрирующего прибора, и общее количество регистрируемых квантов определяет результат наблюдения блеска звезды. Принципиальное различие с измерениями радиоактивности состоит в достаточно большом значении вероятности “успешного исхода”  $p$ , в то время как общее количество ”испытаний”  $n$  (в данном случае – количество квантов, направленных на прибор) чрезвычайно велико. Таким образом возникает проблема асимптотического анализа биномиального распределения при фиксированном  $p$  и  $n \rightarrow \infty$ .

**Пример 7.2** (*определение общего содержания серы в дизельном топливе*). Общее содержание серы служит одной из важных характеристик экологической чистоты дизельного топлива. Речь идет не об “элементарной сере” (процентном содержании химического элемента S, что с высокой степенью точности определяется с помощью спектрального анализа вещества), а способности элемента S при сгорании топлива соединяться с кислородом, образуя серный газ  $SO_2$ . Именно этот газ через выхлопные трубы



машин попадает в среду нашего обитания и соединяется с водой, образуя серную кислоту  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Ну, а что такое серная кислота, и что она может натворить с нашими легкими, вы знаете из школьного курса химии.

Итак, речь идет о химической активности серы, содержащейся в дизельном топливе в связанном виде. Анализ этой активности производится следующим образом. Берется определенное количество дизельного топлива, скажем 100 грамм, и сжигается в замкнутой колбе. Продукты сгорания частично выпадают в золу или в виде дыма по трубчатому отводу попадают в другую замкнутую колбу, наполненную водой. Серный газ соединяется с водой, образуя раствор серной кислоты. Титруя этот раствор определенным количеством щелочи, мы можем определить общее количество элемента серы, которое из дизельного топлива через сжигание и последующее соединение с кислородом и водой перешло в серную кислоту. Разделив это количество серы на вес анализируемой пробы топлива (100 грамм) и умножив результат на 100%, мы получим результат  $x$  нашего статистического эксперимента по наблюдению случайной величины  $X$ .

Повторные анализы аналогичных проб той же партии топлива, в тех же условиях эксперимента и на тех же приборах указывают на значительную изменчивость результатов каждого эксперимента. Метрологический анализ испытаний указывает на то, что эта изменчивость в первую очередь обусловлена случайным характером процессов “спекания” определенного количества серы с другими продуктами сгорания и выпадения их в золу, а также неполным соединением серного газа с водой. Грубо говоря, каждая молекула серы только с некоторой достаточно высокой вероятностью  $p$  может достичь своего конечного состояния в молекуле серной кислоты и внести свой вклад в результат  $x$  наблюдения  $X$ . Понятно, что количество  $n$  молекул серы в пробе топлива чрезвычайно велико. Следовательно, мы имеем дело с проблемой асимптотического анализа биномиального распределения при растущем числе испытаний  $n$  и постоянной вероятности успеха  $p$ .

Ограничимся рассмотрением этих двух примеров, из которых легко видеть, что существует обширнейший класс статистических экспериментов, связанных с наблюдением линейной функции от случайной величины с биномиальным законом распределения  $B(n, p)$ , в котором  $p = \text{const}$ , а  $n$  чрезвычайно велико. Проведем асимптотический анализ такой ситуации и начнем его с исследования асимптотического поведения  $X/n$  – частотной оценки вероятности  $p$  успешного испытания в схеме Бернулли. Тот факт, что при  $n \rightarrow \infty$  относительная частота  $X/n$  стремится к  $p$  в определенном

вероятностном смысле устанавливает один из основных законов теории вероятностей, открытый И. Бернулли в XVII веке.

**Теорема 7.1. (Закон больших чисел Бернулли).** Пусть  $X \sim B(n, p)$ . Тогда, каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{X}{n} - p \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

**Доказательство.** Воспользуемся неравенством Чебышева в форме следствия 6.1, где в случае биномиального распределения  $\mathbf{E}X = np$  и  $\mathbf{D}X = np(1-p)$ . Имеем

$$P \left( \left| \frac{X}{n} - p \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbf{D}(X/n)}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)/n^2}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0,$$

когда  $n \rightarrow \infty$ .

Закон больших чисел разъясняет природу стабилизации относительной частоты выпадения герба около значения  $p = 1/2$ , которую мы наблюдали на первой лекции по теории вероятностей. Действительно, в случайных экспериментах нельзя утверждать, что  $|X/n - p| \leq \varepsilon$ , начиная с некоторого  $n$ . Истина в том, что, начиная с некоторого  $n$ , это неравенство выполняется с любой, наперед заданной и сколь угодно близкой к единице вероятностью. Таким образом мы должны сказать, что в данном случае наблюдается *сходимость по вероятности*, которая имеет совершенно другую природу, чем та сходимость, которую мы изучаем в курсе математического анализа.

Вывод закона больших чисел содержит также объяснение феномену, связанному с порядком  $n^{-1/2}$  ошибки в приближении  $p (= 1/2)$  величиной  $X/n$ . Действительно, в случае  $p = 1/2$  стандартное отклонение  $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}(X/n)} = (2\sqrt{n})^{-1}$ , распределение случайной величины  $X/n$  симметрично, и в силу правила “двух сигм” интервал  $0.5 \pm n^{-1/2}$  накрывает 90% центральной части области возможных значений  $X/n$ .

Естественно, если не делить  $X$  на  $n$ , то  $X \rightarrow \infty$  по вероятности, когда  $n \rightarrow \infty$ . Но если  $X$  центрировать ее средним значением  $np$  и затем масштабировать стандартным отклонением, то построенная таким образом случайная величина  $Y_n = (X - np)/\sqrt{np(1-p)}$  имеет при  $n \rightarrow \infty$  невырожденное распределение. Вид этого распределения устанавливает знаменитая *предельная теорема Муавра–Лапласа* (18 век!). При доказательстве существенно используется следующий технический результат.

**Лемма 7.1.** Пусть  $X \sim B(n, p)$ ,  $n \rightarrow \infty$  и целое  $k \rightarrow \infty$  так, что  $1 > \hat{p} = k/n = O(1)$ . Тогда

$$P(X = k) = f(k | n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \hat{p}(1 - \hat{p})}} \exp\{-nH(\hat{p})\} (1 + O(n^{-1})),$$

где

$$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1 - x) \ln \frac{1 - x}{1 - p}, \quad 0 < x < 1.$$

**Доказательство.** Воспользуемся асимптотической формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + O(n^{-1}))$$

для факториалов  $n!$ ,  $k!$  и  $(n - k)!$  в биномиальном коэффициенте  $C_n^k$  и представим функцию плотности биномиального распределения в асимптотическом виде:

$$\begin{aligned} f(k | n, p) &= \frac{n!}{k!(n - k)!} p^k (1 - p)^{n - k} = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} p^k (1 - p)^{n - k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n - k)} (n - k)^{n - k} e^{-n + k}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{\exp\{n \ln n - k \ln k - (n - k) \ln(n - k) + k \ln p + (n - k) \ln(1 - p)\}}{\sqrt{2\pi n \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}} \cdot \\ &= (1 + O(n^{-1})). \end{aligned}$$

Доказательство завершается очевидными преобразованиями выражения, стоящего в фигурных скобках под экспонентой, к виду  $\{-nH(\hat{p})\}$ .

Лекция 12

**Теорема 7.2.** (Локальная предельная теорема Муавра–Лапласа). Пусть при  $n \rightarrow \infty$  целое  $k = np + O(\sqrt{n})$ . Тогда

$$f(k | n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1 - p)}} \exp\left\{-\frac{(k - np)^2}{2np(1 - p)}\right\} \left(1 + O\left(n^{-1/2}\right)\right).$$

Доказательство. Так как по условию теоремы  $\hat{p} = k/n = p + O(n^{-1/2})$ , то естественно воспользоваться асимптотической формулой леммы 7.1, разлагая функции  $(\hat{p}(1 - \hat{p}))^{-1/2}$  и  $H(\hat{p})$  в ряд Тейлора по степеням  $\hat{p} - p = O(n^{-1/2})$ .

Имеем

$$\begin{aligned} (\hat{p}(1 - \hat{p}))^{-1/2} &= \left( (p + O(n^{-1/2}))(1 - p + O(n^{-1/2})) \right)^{-1/2} = \\ &= (p(1 - p))^{-1/2} (1 + O(n^{-1/2})), \end{aligned}$$

и для доказательства теоремы остается показать, что

$$n H(\hat{p}) = \frac{(k - np)^2}{2np(1 - p)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (1)$$

Разложим

$$H(\hat{p}) = \hat{p} \ln \frac{\hat{p}}{p} + (1 - \hat{p}) \ln \frac{1 - \hat{p}}{1 - p}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $\hat{p} = p$ :

$$H(\hat{p}) = H(p) + (\hat{p} - p)H'(p) + \frac{(\hat{p} - p)^2}{2!}H''(p) + \frac{(\hat{p} - p)^3}{3!}H'''(p + \lambda(\hat{p} - p)),$$

где, как и в любом разложении Тейлора,  $0 < \lambda < 1$ .

Имеем  $H(p) = 0$ , и так как  $H'(x) = \ln(x/p) - \ln((1 - x)/(1 - p))$ , то  $H'(p) = 0$ . Далее,  $H''(x) = 1/x + 1/(1 - x)$ , откуда  $H''(p) = (p(1 - p))^{-1}$ . Наконец,  $H'''(x) = -x^{-2} + (1 - x)^{-2}$ , что влечет ограниченность  $H'''(p + \lambda(\hat{p} - p))$  при больших  $n$ , поскольку  $p$  отграничено от 0 и 1. Таким образом,

$$H(\hat{p}) = \frac{(\hat{p} - p)^2}{2p(1 - p)} + O((\hat{p} - p)^3),$$

что, очевидно, эквивалентно (1).

**Теорема 7.3. (Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа).** Для любых постоянных  $a$  и  $b$  и случайной величины  $X \sim B(n, p)$  справедливо асимптотическое представление

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx. \quad (2)$$

Доказательство. Используя теорему 7.2, представим вероятность  $P(a \leq Y_n < b)$  с  $Y_n = (X - np)/\sqrt{np(1-p)}$  в виде

$$P(a \leq Y_n < b) = \sum_{k \in A} \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp \left\{ -\frac{(k - np)^2}{2np(1-p)} \right\} \left( 1 + O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right), \quad (3)$$

где множество целых чисел

$$A = \left\{ k : a \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right\}.$$

Применение локальной предельной теоремы в данном случае оправдано: если  $k \in A$ , то при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое представление  $k = np + O(\sqrt{n})$ .

Покажем теперь, что правая часть (3) представляет собой сумму Дарбу для интеграла в правой части равенства (2). Для этого положим

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

и разобьем отрезок  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in A$ . Поскольку  $\Delta x_k \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а суммарная длина отрезков разбиения

$$\sum_{k \in A} \Delta x_k \approx b - a,$$

то число отрезков разбиения растет с ростом  $n$ , в то время как их длина стремится к нулю. Следовательно,

$$\sum_{k \in A} \varphi(x_k) \Delta x_k \longrightarrow \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Для завершения доказательства остается только заметить, что  $0 < \varphi(x) < 1$ , и поэтому при  $n \rightarrow \infty$

$$0 \leq \sum_{k \in A} \varphi(x_k) \Delta x_k \cdot O \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq \frac{b-a}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

**З а м е ч а н и е.** Интегральная теорема Муавра–Лапласа иногда формулируется в терминах следующего приближенного равенства для распределения биномиальной случайной величины  $X$  :

$$P(a \leq X < b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx, \quad n \gg 1. \quad (4)$$

В такой записи теоремы знак  $\approx$  означает асимптотическую эквивалентность правой и левой частей (4) (их отношение стремится к единице при  $n \rightarrow \infty$ ) лишь в случае незначительной удаленности  $a$  и  $b$  от центра  $np$  биномиального распределения. Для этого достаточно сравнить запись одного и того же утверждения с помощью формул (2) и (4), чтобы убедиться в справедливости формулы (4) лишь при значениях  $a$  и  $b$  порядка  $np + O(\sqrt{n})$ . В противном случае, как левая, так и правая части (4) с ростом  $n$  стремятся к нулю, но с разной скоростью. Асимптотический анализ биномиальных вероятностей в областях, удаленных от  $np$  на порядок больший, чем  $O(\sqrt{n})$ , составляет содержание *теорем о больших отклонениях биномиального распределения*, которые в нашем курсе теории вероятностей рассматриваться не будут.

Как известно из общего курса анализа, интеграл Эйлера–Пуассона

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1,$$

поэтому при любых  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\sigma \in \mathbb{R}_+$

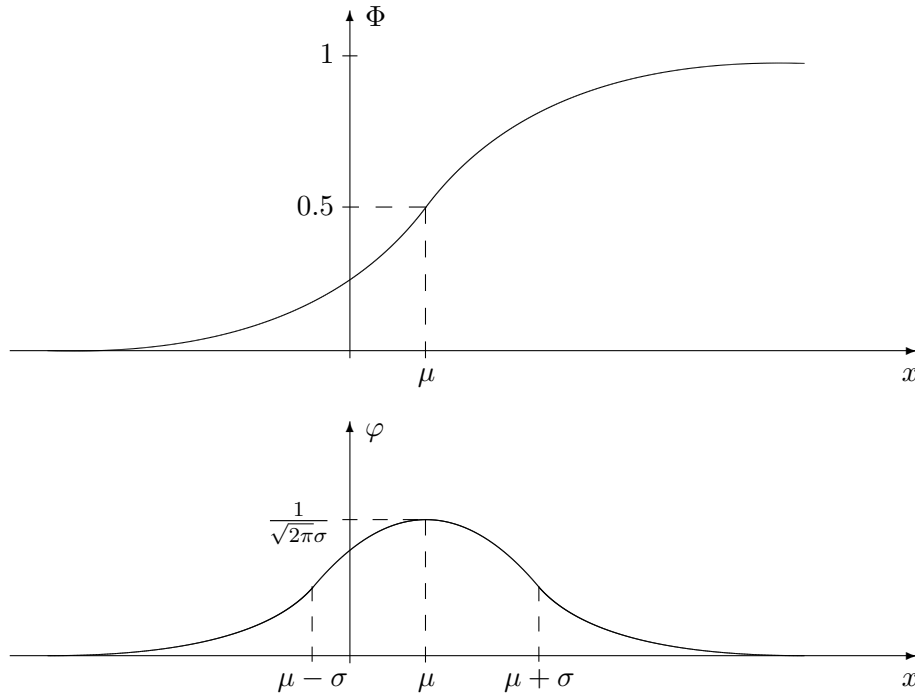
$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

есть функция распределения, а

$$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} -$$

функция плотности. Эти функции определяют двухпараметрическое семейство *нормальных* или *гауссовских* распределений с носителем  $\mathcal{X} = \bar{\mathbb{R}} =$

$[-\infty, +\infty]$  и параметрическим пространством  $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Мы будем обозначать это распределение  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .



Если  $\mu = 0$ , а  $\sigma = 1$ , то  $\mathcal{N}(0, 1)$  называется *стандартным нормальным* распределением; ему соответствуют функция распределения  $\Phi(x)$  и функция плотности  $\varphi(x)$ . Поскольку параметры нормального распределения являются параметрами сдвига ( $\mu$ ) и масштаба ( $\sigma$ ), то семейство нормальных распределений замкнуто относительно линейных преобразований случайных величин: если  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Так как  $\exp\{-x^2/2\}$  – четная функция, то нормальное распределение симметрично относительно точки  $x = \mu$ , которая, как легко видеть, является модой распределения. Симметричность функции плотности влечет также очевидные равенства:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  и  $\Phi(0) = 1/2$ . Графики функции распределения и функции плотности нормального закона  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  представлены на рисунке.

Так как среднее значение стандартного нормального распределения

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0,$$

(как интеграл от нечетной функции по всему  $\mathbb{R}$ ), то  $\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)^2$  имеет среднее значение  $\mu$ . В силу той же нечетности подынтегральных функций все центральные моменты нечетного порядка  $\mu_{2k+1} = \mathbf{E}(X - \mu)^{2k+1} = 0$ .

Четные моменты вычисляются с помощью гамма-функции Эйлера:

$$\mu_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2k} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx = \frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^{2k} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt =$$

$$\frac{\sigma^{2k} 2^k \sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{k-1/2} e^{-x} dx = \frac{\sigma^{2k} 2^k \sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left( k + \frac{1}{2} \right) = \sigma^{2k} (2k - 1)!!.$$

В частности,  $\mathbf{DX} = \sigma^2$ , что оправдывает обозначения параметров  $\mu$  и  $\sigma^2$  нормального распределения. Так как  $\mu_4 = 3\sigma^4$ , то коэффициент эксцесса  $\gamma_2 = 0$ . В силу этого пикообразность или сплюсченность вершины функции плотности любого распределения соотносится с кривой нормальной плотности, которая часто называется в честь Ф. Гаусса *гауссиадой*.

Итак, возвращаясь к нашим примерам с определениями видимой звездной величины и общего содержания серы в дизельном топливе, мы должны прийти к заключению о нормальности распределения наблюдаемой случайной величины (заметим, что это предположение блестяще подтверждается статистическим анализом реальных данных). В этом распределении  $\mu$  играет роль параметра, неизвестное значение которого составляет предмет проводимого исследования (эксперимента), в то время как значение  $\sigma$  характеризует ошибку наблюдений.



## §8. Векторные случайные величины. Независимость случайных величин

Лекция 13

При определении действительной случайной величины мы интерпретировали ее как некоторую числовую характеристику исследуемого объекта. Однако на практике мы чаще сталкиваемся с одновременным наблюдением нескольких числовых характеристик – случайным вектором, распределение которого так же, как и в одномерном случае, порождается распределением на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$  элементарных исходов статистического эксперимента. Чтобы провести аналогию с определением скалярной случайной величины, мы должны вспомнить строение борелевских множеств в  $\mathbb{R}^n$ . Роль интервалов здесь играют *прямоугольники* – подмножества  $\mathbb{R}^n$  вида  $B = B_1 \times \dots \times B_n$ , где каждое  $B_k$  есть открытый  $(a_k, b_k)$ , полуоткрытый  $(a_k, b_k]$  и  $[a_k, b_k)$  или замкнутый  $[a_k, b_k]$  интервал на действительной прямой  $\mathbb{R}$ . Конечные объединения непересекающихся прямоугольников образуют булеву алгебру подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , а наименьшая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}^n$ , содержащая эту булеву алгебру, образует класс измеримых подмножеств  $\mathbb{R}^n$  или *событий*. Таким образом мы получаем измеримое пространство  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ .

**Определение 8.1.** *Векторной случайной величиной* или *случайным вектором* называется измеримое отображение  $X^{(n)} = X^{(n)}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  пространства элементарных исходов  $\Omega$ , наделенного  $\sigma$ -алгеброй измеримых подмножеств  $\mathcal{A}$ , в  $n$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{B}^n$ . Для любого  $B \in \mathcal{B}^n$  справедливо включение  $X^{(n)-1}(B) = \{\omega : X^{(n)}(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ .

Теперь, по аналогии с одномерным случаем, зададим вероятность  $P_n$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ , порожденную вероятностью  $P$  на  $(\Omega, \mathcal{A})$ , соотношением

$$P_n(B) = P\left(X^{(n)-1}(B)\right), \quad \forall B \in \mathcal{B}^n.$$

Как будет видно в дальнейшем, исходное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  играет более важную роль в характеристике распределения  $X^{(n)}$ , если  $n > 1$ . Мы будем изучать вероятностные модели, которые можно записать в виде интеграла Лебега

$$P(X^{(n)} \in B) = \int_B f(x_1, \dots, x_n) d\mu_1(x_1) \cdots d\mu_n(x_n)$$

от неотрицательной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  по мере  $d\mu = d\mu_1 \cdots d\mu_n$ , где каждая  $\sigma$ -конечная мера  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  на борелевской прямой  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  является или считающей мерой, или мерой Лебега. В таком случае вычисление вероятности событий  $B \in \mathcal{B}^n$  сводится или к суммированию вероятностей отдельных точек в  $\mathbb{R}^n$ , или к вычислению кратных интегралов Римана. Функция  $f$  в данном случае выступает в роли  $n$ -мерной *функции плотности*. Естественно, можно ввести также понятие  $n$ -мерной *функции распределения*

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) d\mu_1(t_1) \cdots d\mu_n(t_n),$$

однако при  $n > 1$  с помощью этой функции можно выразить только вероятности “прямоугольников” в  $\mathbb{R}^n$ , в то время как вероятность попадания случайного вектора в подмножества более сложной конфигурации (например, эллипсоиды) приходится вычислять с помощью интеграла от функции плотности. Как и в одномерном случае,  $n$ -мерная функция распределения однозначно определяет распределение вероятностей на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ , то есть имеет место  $n$ -мерный аналог теоремы 4.1.

Из определения функции распределения вытекает, что в случае непрерывного распределения ( $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$  – мера Лебега) функция плотности  $f$  выражается через функцию распределения посредством дифференцирования

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n},$$

а в дискретном случае ( $\mu$  – считающая мера, приписывающая единицу каждой точке  $\mathbb{R}^n$  с целочисленными координатами)

$$f(x_1, \dots, x_n) = P(X^{(n)} = x^{(n)}) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n).$$

Я полагаю, вы сами сможете записать аналогичные связи между  $F$  и  $f$  в “смешанном” дискретно-непрерывном случае, когда часть компонент случайного вектора имеет непрерывное распределение, а другая – дискретное.

Как вычислить совместное распределение отдельных компонент  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  случайного вектора  $X^{(n)}$ ? Для этого достаточно в функции распределения  $X^{(n)}$  устремить к  $+\infty$  все переменные, отличные от  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ ,

или, что то же, проинтегрировать функцию плотности по каждой из переменных, отличных от  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ , в пределах  $\pm\infty$ .

Заметим, что в теории вероятностей принято называть распределения каждой компоненты (случайной величины)  $X_i, i = 1, \dots, n$ , – *маргинальными* или *частными* распределениями.

**Пример 8.1** (*равномерное распределение на круге.*) В часть плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченную окружностью  $x^2 + y^2 = r^2$ , наугад бросается точка, так что ее координаты  $(x, y)$  представляют реализацию случайного вектора  $(X, Y)$ . Как и в случае с бросанием точки на отрезок прямой, термин “наугад” понимается в смысле зависимости вероятности попадания точки в некоторую, измеримую по Лебегу часть  $B$  круга только от площади  $B$ . Те же рассуждения, что и при выводе равномерного распределения на отрезке, приводят нас к равномерному распределению  $(X, Y)$  с функцией плотности (по мере Лебега  $d\mu = dx dy$ )  $f(x, y)$ , равной постоянной  $1/\pi r^2$ , если  $x^2 + y^2 \leq r^2$ , и равной нулю вне этого круга.

Найдем функцию плотности  $f^X(x)$  маргинального распределения  $X$ . Для этого мы должны проинтегрировать функцию  $f(x, y)$  по переменной  $y$  в пределах  $\pm\infty$  при каждом фиксированном значении  $x \in \mathbb{R}$ . Если  $x$  фиксировано, то  $f(x, y)$  отлична от нуля и равна  $1/\pi r^2$  только при значениях  $y$ , удовлетворяющих неравенству  $-\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$ . Следовательно,

$$f^X(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2},$$

если  $|x| \leq r$ , и  $f^X(x) = 0$  в противном случае. Легко видеть, что маргинальное распределение второй компоненты  $Y$  случайного вектора имеет тот же вид. Таким образом, маргинальные распределения компонент отличны от равномерного и имеют четко выраженную моду, совпадающую с началом координат.

Маргинальные плотности компонент случайного вектора наиболее просто находятся в том случае, когда функция плотности  $X^{(n)}$  распадается в произведение функций плотности отдельных компонент. Понятно, что хотя бы в дискретном случае это говорит о некоторой “независимости” компонент случайного вектора. Чтобы ввести строгое определение такой независимости, мы должны обратиться к  $\sigma$ -подалгебрам алгебры  $\mathcal{A}$ , порожденным каждой компонентой  $X_i, i = 1, \dots, n$ , вектора  $X^{(n)}$ .

Пусть  $X = X(\omega)$  – случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{A})$  со значениями в измеримом пространстве  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Рассмотрим класс  $\mathcal{A}_X = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$  всех прообразов элементов борелевского поля  $\mathcal{B}$ , полагая  $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$ . Имеет место

**Предложение 8.1.** *Класс  $\mathcal{A}_X$  подмножеств  $\Omega$  является  $\sigma$ -алгеброй (подалгеброй  $\mathcal{A}$ .)*

*Доказательство.* Достаточно проверить аксиомы булевой  $\sigma$ -алгебры (см. определение 2.5).

(A1). По определению  $\mathcal{A}_X$  пространство элементарных исходов  $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{A}_X$ .

(A2). Покажем, что дополнение  $(X^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}_X$ , каково бы ни было  $B \in \mathcal{B}$ . Действительно, событие, противоположное  $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$ , означает, что  $X(\omega)$  не принадлежит  $B$ , то есть  $X(\omega) \in B^c$ . Так как  $B^c \in \mathcal{B}$ , то  $X^{-1}(B^c) = (X^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}_X$ .

(A3)<sub>S</sub>. Рассуждения, аналогичные предыдущему пункту, показывают, что

$$\bigcup_1^\infty X^{-1}(B_i) = X^{-1}\left(\bigcup_1^\infty B_i\right) \in \mathcal{A}_X.$$

Легко понять, что данное утверждение справедливо не только для скалярных случайных величин, но и случайных векторов. Теперь мы в состоянии ввести одно из фундаментальнейших понятий теории вероятностей и математической статистики.

**Определение 8.2.** Случайные величины (случайные векторы)  $X_1, \dots, X_n$ , заданные на одном и том же измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$ , называются *независимыми в совокупности* или *совместно независимыми*, если независимы  $\sigma$ -подалгебры  $\mathcal{A}_{X_1}, \dots, \mathcal{A}_{X_n}$   $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$ , порожденные соответствующими случайными величинами.

Таким образом, в соответствии с определением 3.4 независимости  $\sigma$ -алгебр, для любых элементов (событий)  $B_1, \dots, B_n$  борелевского поля  $\mathcal{B}$  справедливо равенство

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_1^n P(X_i \in B_i), \quad (1)$$

то есть совместное распределение независимых случайных величин распадается в произведение их маргинальных распределений. Оказывается,

для независимости случайных величин достаточно потребовать выполнения более слабого условия, состоящего в возможности представления совместной функции распределения  $X_1, \dots, X_n$  в виде произведения маргинальных функций распределения.

**Предложение 8.2.** (*критерий независимости случайных величин*). Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы в совокупности тогда и только тогда, когда их совместная функция распределения (функция плотности) распадается в произведение маргинальных функций распределения (маргинальных функций плотности):

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n F^{X_i}(x_i), \quad f(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n f^{X_i}(x_i).$$

**Доказательство.** Условимся обозначать полужирной буквой  $\mathbf{P}$  вероятность на исходном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$ , на котором определены случайные величины  $X_1, \dots, X_n$ , а обычной буквой  $P$  – вероятность на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ , которая единственным образом определяется заданием функции распределения  $F$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in (-\infty, x_i)\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}((-\infty, x_i))\right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i^{-1}((-\infty, x_i))) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in (-\infty, x_i)) = \prod_1^n F^{X_i}(x_i), \end{aligned}$$

то есть свойство мультипликативности совместной функции распределения есть частный случай равенства (1).

Для доказательства достаточности условия мультипликативности покажем, что для случайных величин  $X$  и  $Y$  равенство  $F(x, y) = F^X(x)F^Y(y)$  при любых  $x, y \in \mathbb{R}$  влечет  $P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$  каковы бы ни были  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  (общий случай, касающийся независимости  $n > 2$  случайных величин, рассматривается с привлечением метода математической индукции). Отсюда будет следовать независимость порожденных сигма-алгебр. Действительно, любой элемент  $A_1 \in \mathcal{A}_X$  имеет вид  $X^{-1}(B_1)$  с некоторым  $B_1 \in \mathcal{B}$ , и, аналогично, любой  $A_2 \in \mathcal{A}_Y$  имеет вид  $Y^{-1}(B_2)$  с  $B_2 \in \mathcal{B}$ , так что при любых  $A_1 \in \mathcal{A}_X, A_2 \in \mathcal{A}_Y$

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(X^{-1}(B_1) \cap Y^{-1}(B_2)) = P(X \in B_1, Y \in B_2) =$$

$$P(X \in B_1)P(Y \in B_2) = \mathbf{P}(X^{-1}(B_1)) \mathbf{P}(Y^{-1}(B_2)) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2),$$

то есть сигма-алгебры  $\mathcal{A}_X$  и  $\mathcal{A}_Y$  независимы.

Перепишем условие независимости

$$\begin{aligned} P(X \in (-\infty, x))P(Y \in (-\infty, y)) = \\ P(\{X \in (-\infty, x)\} \cap \{Y \in (-\infty, y)\}) \end{aligned}$$

в виде

$$\begin{aligned} F^X(x) = P(X \in (-\infty, x)) = \\ \frac{P(\{X \in (-\infty, x)\} \cap \{Y \in (-\infty, y)\})}{F^Y(y)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку функция распределения  $F^X(x)$  однозначно определяет маргинальное распределение  $P(X \in B_1)$  случайной величины  $X$  (теорема 4.1), то равенство (2) влечет

$$P(X \in B_1) = \frac{P(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in (-\infty, y)\})}{F^Y(y)}$$

или, что то же,

$$F^Y(y) = P(Y \in (-\infty, y)) = \frac{P(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in (-\infty, y)\})}{P(X \in B_1)}$$

для любых  $B_1 \in \mathfrak{B}$ . Используя снова теорему 4.1 об однозначном определении распределения вероятностей случайной величины  $Y$  посредством ее функции распределения  $F^Y(y)$ , получаем требуемое определение независимости:

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2),$$

каковы бы ни были  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ .

Утверждение теоремы, касающееся функции плотности, следует немедленно из соотношения между функцией распределения и функцией плотности:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) d\mu_1(u) d\mu_2(v).$$

Следующее утверждение, относящееся к функциям от независимых случайных величин, позволяет вычислять моментные характеристики некоторых распределений значительно проще, чем это делалось в §6.

**Предложение 8.3.** Если  $X_1, \dots, X_n$  независимы в совокупности, то

1<sup>0</sup>. независимы в совокупности случайные величины  $Y_1 = g_1(X_1), \dots, Y_n = g_n(X_n)$ , где  $g_i, i = 1, \dots, n$  – измеримые функции;

$$2^0. \mathbf{E} \prod_1^n X_i = \prod_1^n \mathbf{E} X_i;$$

$$3^0. \mathbf{D} \sum_1^n X_i = \sum_1^n \mathbf{D} X_i.$$

Доказательство. 1<sup>0</sup>. Поскольку  $\sigma$ -алгебры, порожденные случайными величинами  $Y_1, \dots, Y_n$ , являются подалгебрами соответствующих  $\sigma$ -алгебр, порожденных  $X_1, \dots, X_n$ , а последние независимы (см. определение 3.4), то данное утверждение следует непосредственно из определения 8.2 независимости случайных величин.

2<sup>0</sup>. Пусть  $f_i(\cdot)$  – функция плотности  $X_i$  по мере  $\mu_i, i = 1, \dots, n$ . Тогда, в силу предложения 8.2, совместная функция плотности

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n f_i(x_i),$$

так что

$$\mathbf{E} \prod_1^n X_i = \int_{\mathbf{R}} x_1 f_1(x_1) d\mu_1(x_1) \cdots \int_{\mathbf{R}} x_n f_n(x_n) d\mu_n(x_n) = \prod_1^n \mathbf{E} X_i.$$

3<sup>0</sup>. Используя только что доказанное утверждение (2) и свойство линейности математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \sum_1^n X_i &= \mathbf{E} \left( \sum_1^n (X_i - \mathbf{E} X_i) \right)^2 = \\ &= \mathbf{E} \left[ \sum_1^n (X_i - \mathbf{E} X_i)^2 + \sum_{i \neq j} (X_i - \mathbf{E} X_i)(X_j - \mathbf{E} X_j) \right] = \\ &= \sum_1^n \mathbf{E} (X_i - \mathbf{E} X_i)^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{E} (X_i - \mathbf{E} X_i) \cdot \mathbf{E} (X_j - \mathbf{E} X_j) = \end{aligned}$$

$$\sum_1^n \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^2 = \sum_1^n \mathbf{D}X_i.$$

Как будет видно в дальнейшем, вывод ряда вероятностных моделей строится на стохастическом представлении наблюдаемой случайной величины в виде суммы независимых случайных величин:  $X = X_1 + \dots + X_n$ , и при этом распределение каждой  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  имеет достаточно простой вид, например, вычислить моменты  $X_i$  намного проще, чем моменты  $X$ . В таком случае формулы предложения 8.3 указывают прямой путь к вычислению моментов, а иногда и распределения, случайной величины  $X$ . В сущности, мы уже использовали технику таких представлений, когда выводили биномиальное распределение – распределение числа успехов в испытаниях Бернулли.

#### Лекция 14

**Пример 8.2** (о некоторых свойствах биномиального распределения). Результат каждого  $i$ -го испытания в схеме Бернулли можно регистрировать как значение индикаторной функции успеха, обозначая цифрой 1 успех, а цифрой 0 неудачу. Таким образом, с  $i$ -ым испытанием соотносится случайная величина  $X_i$ , принимающая значение 1 с вероятностью  $p$  и значение 0 с вероятностью  $1 - p$ . Последовательности из  $n$  независимых испытаний Бернулли ставится в соответствие случайный вектор  $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ , состоящий из независимых, одинаково распределенных по закону  $B(1, p)$  компонент (напомним,  $B(1, p)$  есть частный случай биномиального распределения, которое мы назвали двухточечным распределением). В таких обозначениях случайная величина  $X$ , реализация которой равна числу успехов в  $n$  испытаниях (числу  $X_i$ , принявших значение 1), представима в виде  $X = \sum_1^n X_i$ , и в силу предложения 8.3

$$\mathbf{E}X = \sum_1^n \mathbf{E}X_i = n\mathbf{E}X_1, \quad \mathbf{D}X = \sum_1^n \mathbf{D}X_i = n\mathbf{D}X_1.$$

Имеем:  $\mathbf{E}X_1 = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$ ,  $\mathbf{E}X_1^2 = \mathbf{E}X_1 = p$ ,  $\mathbf{D}X_1 = p - p^2 = p(1 - p)$ , откуда немедленно получаем известные нам и полученные в результате более сложных выкладок формулы моментов биномиального распределения:  $\mathbf{E}X = np$ ,  $\mathbf{D}X = np(1 - p)$ .



Укажем еще на одно интересное применение стохастического представления биномиальной случайной величины  $X$  в виде суммы независимых случайных величин.

**Предложение 8.4** (теорема сложения для биномиального распределения). Если  $X_1, \dots, X_m$  независимы в совокупности и  $X_k \sim B(n_k, p)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , то

$$X = \sum_1^m X_k \sim B(n, p),$$

где  $n = n_1 + \dots + n_m$ .

**Доказательство.** Каждое  $X_k$  есть сумма  $n_k$  независимых, одинаково распределенных по закону  $B(1, p)$  случайных величин. Следовательно,  $X$  есть сумма  $n$  таких же величин, откуда  $X \sim B(n, p)$ .

Распределения, для которых справедливы *теоремы сложения*, составляют особый класс *устойчивых* законов распределений, и изучению свойств таких распределений посвящаются отдельные монографии. Вы, наверное, догадываетесь, что устойчивым является пуассоновское распределение, как предел биномиального. В дальнейшем мы покажем, что это в действительности так, разработав более совершенный математический аппарат доказательств теорем сложения. А сейчас мы докажем устойчивость нормального закона, получив предварительно общую формулу для распределения суммы независимых случайных величин.

**Предложение 8.5** (формула свертки распределений). Пусть  $X_1$  и  $X_2$  независимы и имеют непрерывные распределения с функциями плотности  $f_1(x)$  и, соответственно,  $f_2(x)$  по мере Лебега  $d\mu = dx$ . Тогда функция плотности  $f(x)$  распределения случайной величины  $X = X_1 + X_2$  есть свертка функций  $f_1$  и  $f_2$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)f_1(x-t)dt.$$

**Доказательство.** Совместная функция плотности  $f(x_1, x_2)$  независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  равна (см. предложение 8.2) произведению их функций плотности:  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ . Используя известную нам формулу (см. формулы после определения 8.1)

$$P((X_1, X_2) \in B) = \int_B f_1(x_1)f_2(x_2)dx_1dx_2$$

для вычисления вероятностей попадания случайного вектора в любую измеримую область  $B$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , представим функцию распределения суммы случайных величин в виде

$$F(x) = P(X_1 + X_2 < x) = \int \int_{t+s < x} f_1(t)f_2(s)dt ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)dt \int_{-\infty}^{x-t} f_2(s)ds.$$

Дифференцируя правую часть последнего равенства по  $x$ , получаем искомую первую формулу для плотности  $f(x)$ . Вторая формула справедлива в силу симметрии вхождения функций  $f_1$  и  $f_2$  в интегральное представление  $F(x)$ .

**Предложение 8.6** (теорема сложения для нормального распределения.) Если  $X_1, \dots, X_n$  независимы в совокупности и каждое  $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то

$$X = \sum_1^n X_k \sim \mathcal{N}\left(\sum_1^n \mu_k, \sum_1^n \sigma_k^2\right).$$

**Доказательство.** Предложение достаточно доказать для случая  $n = 2$ , поскольку для произвольного числа слагаемых доказательство проводится методом индукции. При  $n = 2$  формула свертки дает следующее выражение для функции плотности  $f(x)$  случайной величины  $X = X_1 + X_2$ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-t-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} dt.$$

Приводя квадратическую форму под знаком экспоненты к виду

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{b}\right)^2 + h(a,b),$$

где  $a$  и  $b$  зависят от параметров  $\mu_i$  и  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ , и используя известную нам формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{b}\right)^2\right\} dt = 1,$$

находим искомую функцию плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right\}.$$

**§9. Моментные характеристики многомерных распределений.  
Мультиномиальное и многомерное нормальное  
распределения**

Для описания положения в пространстве, рассеяния и формы многомерных распределений обычно используются *смешанные* центральные моменты, вычисляемые как математические ожидания от произведения различных степеней центрированных средними значениями компонент случайного вектора:

$$\mathbf{E} [(X_1 - \mu_1)^{k_1} \cdots (X_n - \mu_n)^{k_n}],$$

где  $\mu_i = \mathbf{E}X_i$  – вектор средних значений компонент случайного вектора  $X^{(n)}$ . Мы будем иметь дело только с моментами второго порядка  $\lambda_{ij} = \mathbf{E}(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Матрица  $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$  моментов второго порядка называется *ковариационной матрицей* или *матрицей ковариаций*  $\text{cov}(X_i, X_j) = \lambda_{ij}$ . Естественно, диагональ ковариационной матрицы  $\Lambda$  составляют дисперсии  $\sigma_i^2 = \lambda_{ii} = \text{cov}(X_i, X_i)$  соответствующих компонент  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  случайного вектора  $X^{(n)}$ , в то время как смешанные моменты  $\lambda_{ij}$  при  $i \neq j$  характеризуют степень *линейной связности* компонент  $X_i$  и  $X_j$ . Этот термин требует специального обсуждения, ввиду его исключительной распространенности в приложениях многомерного статистического анализа.

Всё вертится около следующего лебеговского варианта известного неравенства Коши–Буняковского.

**Неравенство Шварца.** Пусть  $X$  и  $Y$  – случайные величины, а  $g(X)$  и  $h(Y)$  – измеримые функции от соответствующих величин, обладающие конечными вторыми моментами. Тогда

$$|\mathbf{E}g(X)h(Y)| \leq [\mathbf{E}g^2(X)\mathbf{E}h^2(Y)]^{1/2}$$

с равенством тогда и только тогда, когда функции  $g$  и  $h$  линейно связаны: существуют такие постоянные  $a$  и  $b$ , что  $P(ag(X) + bh(Y) = 0) = 1$ .

Применим это неравенство к функциям  $g(X) = X - \mu_X$  и  $h(Y) = Y - \mu_Y$ , где  $\mu_X = \mathbf{E}X$ ,  $\mu_Y = \mathbf{E}Y$ . Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то, в силу предложения 8.3б  $\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) = \mathbf{E}(X - \mu_X)\mathbf{E}(Y - \mu_Y) = 0$ , то есть независимые случайные величины имеют нулевую ковариацию. Если же  $X$  и  $Y$  линейно связаны:  $Y - \mu_Y = a(X - \mu_X)$ , то в неравенстве Шварца достигается знак равенства, так что  $\text{cov}(X, Y) =$

$\lambda_{XY} = \mathbf{E}(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) = \pm\sqrt{\mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y} = \pm\sigma_X\sigma_Y$  (естественно, мы предполагаем, что  $X$  и  $Y$  принимают по крайней мере два различных значения с ненулевой вероятностью). Эти два крайних значения в неравенстве Шварца оправдывают введение следующей меры линейной связности пары случайных величин.

**Определение 9.1.** Пусть  $X$  и  $Y$  – две случайные величины с конечными дисперсиями. Моментная характеристика

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{\lambda_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

называется *коэффициентом корреляции* между случайными величинами  $X$  и  $Y$ .

Итак, если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\rho = 0$ , если же  $Y = a + bX$  при некоторых постоянных  $a$  и  $b$ , то  $|\rho| = 1$ , причем  $\rho = -1$ , если  $a < 0$ , и  $\rho = +1$ , если  $a > 0$ . Однако, **равенство  $\rho = 0$  не означает, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы!**

Пример 9.1 (*зависимых случайных величин с нулевым коэффициентом корреляции*). Покажем, что случайные величины  $X$  и  $Y$ , равномерно распределенные в круге радиуса  $r$ , зависимы, но  $\rho_{XY} = 0$ .

Действительно, совместная функция плотности  $f(x, y)$  случайных величин  $X$  и  $Y$  (см. пример 8,1) отлична от нуля только в круге  $x^2 + y^2 \leq r^2$  и принимает постоянное значение, равное  $1/\pi r^2$ , внутри этого круга. Маргинальные плотности

$$f^X(x) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2}, \quad |x| \leq r; \quad f^Y(y) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - y^2}, \quad |y| \leq r,$$

и  $f^X(x) = f^Y(y) = 0$  вне квадрата  $|x| \leq r, |y| \leq r$ .

Имеем:  $f^X(x)f^Y(y) = 4\pi^{-2}r^{-4} [(r^2 - x^2)(r^2 - y^2)]^{1/2}$ , что, очевидно, не совпадает с  $f(x, y) = 1/\pi r^2$  в области  $x^2 + y^2 \leq r^2$ . Таким образом, в силу предложения 8.2, случайные величины  $X$  и  $Y$  зависимы.

Покажем, что, тем не менее,  $\rho_{XY} = 0$ . Функция  $f(x, y)$  центрально симметрична, и поэтому  $\mu_X = \mu_Y = 0$ . Далее,

$$\lambda_{XY} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^r x dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y dy = 0.$$

Но если  $\lambda_{XY} = 0$ , то и  $\rho = 0$ .

Для ковариации пары случайных величин справедливы формулы, аналогичные тем, что были получены для дисперсии в предложениях 6.1 и 8.3.

**Предложение 9.1.** Для любой пары случайных величин  $(X, Y)$  и независимых двумерных векторов  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ , обладающих конечными вторыми моментами, справедливы равенства

$$(1) \quad \lambda_{XY} = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y,$$

$$(2) \quad \lambda_{S_X S_Y} = \sum_1^n \lambda_{X_i Y_i},$$

где

$$S_X = \sum_1^n X_i, \quad S_Y = \sum_1^n Y_i.$$

**Доказательство.** (1) Имеем  $\lambda_{XY} = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)] = \mathbf{E}(XY - Y\mathbf{E}X - X\mathbf{E}Y + \mathbf{E}X\mathbf{E}Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$ .

(2) Делаем столь же тривиальные выкладки, что и выше, и при этом не забудем, что среднее от произведения независимых случайных величин равно произведению средних:

$$\begin{aligned} \lambda_{S_X S_Y} &= \mathbf{E} \left[ \sum_1^n (X_i - \mathbf{E}X_i) \sum_1^n (Y_i - \mathbf{E}Y_i) \right] = \\ &= \mathbf{E} \left[ \sum_1^n (X_i - \mathbf{E}X_i)(Y_i - \mathbf{E}Y_i) + \sum_{i \neq j} (X_i - \mathbf{E}X_i)(Y_j - \mathbf{E}Y_j) \right] = \\ &= \sum_1^n \mathbf{E} [(X_i - \mathbf{E}X_i)(Y_i - \mathbf{E}Y_i)] + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i) \cdot \mathbf{E}(Y_j - \mathbf{E}Y_j). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части равно нулю, ибо  $\mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i) = \mathbf{E}X_i - \mathbf{E}X_i = 0$ , а первое слагаемое есть сумма ковариаций каждого вектора.

Изучим две наиболее распространенные многомерные вероятностные модели.

**Мультиномиальное распределение**  $\mathcal{M}(m, n, \mathbf{p})$ . Рассматривается схема независимых испытаний, в каждом из которых может произойти одно из  $m \geq 2$  событий  $A_1, \dots, A_m$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_m$ ,  $\sum_1^m p_j = 1$ . Типичный пример таких испытаний – наблюдения энтомолога по оценке численности видов насекомых, населяющих некоторый, достаточно изолированный район нашей планеты. Всего проводится  $n$  независимых испытаний, и регистрируются значения  $x_1, \dots, x_m$  компонент случайного вектора  $X^{(m)} = (X_1, \dots, X_m)$ ,  $\sum_1^m X_j = n$ , где  $x_j$  – количество испытаний, в которых произошло событие  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Легко видеть, что мы имеем дело с многомерным аналогом схемы Бернулли, и для вывода распределения  $X^{(m)}$  естественно воспользоваться техникой стохастических представлений наблюдаемого случайного элемента в виде суммы индикаторов, то есть поступить по аналогии с примером 8.2. Свяжем с каждым  $i$ -ым испытанием случайный вектор  $Y_i = (X_{1i}, \dots, X_{mi})$ , каждая компонента  $X_{ji}$  которого принимает значение 1, если в  $i$ -ом испытании произошло событие  $A_j$ , и  $X_{ji} = 0$  в противном случае. Таким образом, все компоненты  $Y_i$  равны нулю за исключением одной компоненты, равной единице, и номер этой компоненты совпадает с номером исхода (события  $A_j$ ), которым завершилось  $i$ -ое испытание,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Постулируется, что случайные векторы  $Y_1, \dots, Y_n$  независимы в совокупности (следствие независимости проведения испытаний).

При таком соглашении каждая компонента  $X_j$  наблюдаемого вектора  $X^{(m)}$  имеет стохастическое представление

$$X_j = \sum_{i=1}^n X_{ji}, \quad (1)$$

в котором  $X_{j1}, \dots, X_{jn}$  независимы и одинаково  $B(1, p_j)$  распределены: принимают значение 1 с вероятностью  $p_j$  и значение 0 с вероятностью  $1 - p_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Из представления (1) следует, что вероятность любого события в  $n$  мультиномиальных испытаниях (значений, которые принимают векторы  $Y_1, \dots, Y_n$ ) определяется только количествами  $x_1, \dots, x_m$  испытаний, которые завершились соответствующими исходами  $A_1, \dots, A_m$ . Легко видеть, что эта вероятность равна  $p_1^{x_1} \cdots p_m^{x_m}$ , где  $\sum_1^m x_j = n$ . Теперь для того, чтобы вывести функцию плотности  $f(x_1, \dots, x_m) = P(X_1 =$

$x_1, \dots, X_m = x_m$ ), достаточно решить комбинаторную задачу, которую мы умеем решать в случае  $m = 2$ : сколькими способами можно получить  $x_1$  исходов  $A_1$ ,  $x_2$  исходов  $A_2$ ,  $\dots$ ,  $x_m$  исходов  $A_m$  в  $n = \sum_1^m x_i$  испытаниях? Решение задачи дают *мультиномиальные коэффициенты*

$$C_n^{x_1 \dots x_m} = \frac{n!}{x_1! \dots x_m!}$$

(сравните с биномиальными коэффициентами  $C_n^x$ ). Итак, функция плотности *мультиномиального распределения*  $\mathcal{M}(m, n, \mathbf{p})$  по  $m$ -кратному произведению считающих мер равна

$$f(x_1, \dots, x_m) = \frac{n!}{x_1! \dots x_m!} p_1^{x_1} \dots p_m^{x_m},$$

в области  $\sum_1^m x_j = n$  и  $f(x_1, \dots, x_m) = 0$  в случае целых  $x_1, \dots, x_m$ , не удовлетворяющих последнему равенству, а также в случае дробных  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Вычислим моментные характеристики мультиномиального распределения, используя стохастическое представление (1). Вектор средних

$$\mathbf{E}X_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_{ji} = n(1 \cdot p_j + 0 \cdot (1 - p_j)) = np_j, \quad j = 1, \dots, m;$$

вектор дисперсий (см. предложение 9.1)

$$\sigma_j^2 = \mathbf{D} \sum_{i=1}^n X_{ji} = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}X_{ji} = np_j(1 - p_j), \quad j = 1, \dots, m.$$

Вычислим ковариации  $X_j$  с  $X_l$  при  $j \neq l$  (см. предложение 9.1):

$$\lambda_{jl} = \sum_{i=1}^n \text{cov}(X_{ji}, X_{li}) = \sum_{i=1}^n [\mathbf{E}(X_{ji}X_{li}) - \mathbf{E}X_{ji}\mathbf{E}X_{li}].$$

Поскольку при  $i$ -ом испытании только одна из компонент  $X_{1i}, \dots, X_{mi}$  равна единице, а остальные равны нулю, то  $X_{ji}X_{li} \equiv 0$ , и  $\lambda_{jl} = -np_jp_l$ . Коэффициенты корреляции

$$\rho_{jl} = -\frac{np_jp_l}{n(p_j(1-p_j)p_l(1-p_l))^{1/2}} = -\sqrt{\frac{p_jp_l}{(1-p_j)(1-p_l)}}, \quad j \neq l.$$

Отрицательные значения коэффициентов корреляции есть следствие связей между компонентами наблюдаемого вектора:  $\sum_1^m X_j = n$ .

**Многомерное нормальное распределение  $N_m(\mu, \Lambda)$ .** Мы трактовали мультиномиальную схему испытаний как многомерный аналог схемы независимых испытаний Бернулли. В таком случае естественно рассмотреть многомерный аналог предельной теоремы Муавра–Лапласа. Применяя формулу Стирлинга, нетрудно убедиться, что имеет место

**Теорема 9.1. (Интегральная предельная теорема для мультиномиального распределения).** Для любых постоянных  $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$  и  $(m+1)$ -мерного случайного вектора  $X^{(m+1)} = (X_1, \dots, X_m, X_{m+1}) \sim \mathcal{M}(m+1, n, \mathbf{p})$  справедливо асимптотическое представление

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( a_1 \leq \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} < b_1, \dots, a_m \leq \frac{X_m - np_m}{\sqrt{np_m(1-p_m)}} < b_m \right) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\mathbf{P}|}} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \right\} dx_1 \dots dx_m, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $\mathbf{x}$  – аналогичный вектор столбец;  $\mathbf{P} = \|\rho_{ij}\|$  – корреляционная матрица, в которой  $\rho_{ii} = 1$  и

$$\rho_{ij} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}},$$

если  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ ;  $\mathbf{P}^{-1}$  – матрица, обратная к  $\mathbf{P}$ , наконец,  $|\mathbf{P}|$  – определитель матрицы  $\mathbf{P}$ .

Интеграл (2) определяет непрерывное распределение вероятностей на прямоугольниках (следовательно, и на борелевском поле) пространства  $\mathbb{R}^m$ , причем функция плотности этого распределения

$$f_m(\mathbf{x}' | \mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\mathbf{P}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \right\}, \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m.$$

Если теперь вместо корреляционной матрицы  $\mathbf{P}$  мультиномиального распределения рассмотреть произвольную, положительно определенную корреляционную матрицу  $\mathbf{P} = \|\rho_{ij}\|$ ,  $\rho_{ii} = 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то  $f_m(\mathbf{x}' | \mathbf{P})$  будет функцией плотности случайного вектора  $X^{(m)} = (X_1, \dots, X_m)$ , имеющего стандартное  $m$ -мерное нормальное распределение  $N_m(0, \mathbf{P})$ . Далее, если ввести вектор средних  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  и вектор дисперсий



$\sigma^2 = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)$ , то случайный вектор  $\sigma X_1 + \mu_1, \dots, \sigma_m X_m + \mu_m$  будет иметь *многомерное нормальное распределение*  $\mathcal{N}_m(\mu, \Lambda)$  с функцией плотности

$$\varphi_m(\mathbf{x}' | \mu, \Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\Lambda|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)' \Lambda^{-1} (x - \mu) \right\} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma_1 \cdots \sigma_m \sqrt{|\mathbf{P}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\mathbf{P}_{ij}}{|\mathbf{P}|} \cdot \frac{(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j} \right\}, \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m,$$

где определитель ковариационной матрицы  $|\Lambda| = \sigma_1 \cdots \sigma_m \cdot |\mathbf{P}|$ , а  $\mathbf{P}_{ij}/|\mathbf{P}|$  – элементы матрицы  $\mathbf{P}^{-1}$ , обратной к  $\mathbf{P}$ .

Нетрудно видеть, что если коэффициенты корреляции  $\rho_{ij} = 0$ , когда  $i \neq j$ , то есть  $\mathbf{P}$  есть единичная матрица, а в матрице ковариаций  $\Lambda$  отличны от нуля только диагональные элементы  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$ , то нормальная функция плотности распадается в произведение маргинальных нормальных  $\mathcal{N}_1(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, m$  функций плотности. Поэтому справедливо

**Предложение 9.2.** *В случае нормального распределения случайного вектора некоррелированность его компонент влечет их независимость.*

Следует обратить особое внимание на требование *положительной определенности* корреляционной матрицы  $\mathbf{P}$  или, что то же, ковариационной матрицы  $\Lambda$ . Если эти матрицы положительно полуопределены, то есть имеют ранг  $r < m$ , то мы получим *несобственное*  $m$ -мерное нормальное распределение, вся вероятностная масса которого будет сосредоточена на гиперплоскости  $\mathbb{R}^r$ , а между компонентами случайного вектора  $X^{(m)}$  будет существовать линейная зависимость.

Указанные свойства многомерного нормального распределения наиболее наглядно прослеживаются в случае  $m = 2$  – нормального распределения на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Функция плотности распределения случайного вектора  $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Lambda)$  при  $\rho = \rho_{XY} \neq \pm 1$  равна

$$\varphi_2(x, y | \mu, \Lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\}.$$

Как отмечалось выше,  $\mu_1 = \mathbf{E}X$ ,  $\mu_2 = \mathbf{E}Y$  есть вектор средних значений;  $\sigma_1^2 = \mathbf{D}X$ ,  $\sigma_2^2 = \mathbf{D}Y$  – дисперсии соответствующих случайных величин;  $\rho = \text{cov}(X, Y)/\sigma_1\sigma_2$ , – коэффициент корреляции между  $X$  и  $Y$ . В том, что это действительно так, можно убедиться и непосредственным вычислением интегралов, определяющих соответствующие моментные характеристики. Маргинальные функции плотности  $f^X(x)$  и  $f^Y(y)$  находятся также непосредственным интегрированием совместной функции плотности  $\varphi_2(x, y | \mu, \Lambda)$  по соответствующим переменным  $y$  и  $x$ :

$$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}, \quad f^Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\},$$

то есть  $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Особо отметим, что *существуют многомерные распределения, отличные от нормального, но имеющие нормальные маргинальные распределения.*

Подобные эллипсы

$$\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left( \frac{(x - \mu)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) = c^2$$

играют роль *кривых равных вероятностей*: нетрудно вычислить, что вероятность попадания  $(X, Y)$  в область, ограниченную этим эллипсом, равна  $1 - \exp\{-c^2\}$ .

Форма эллипса равных вероятностей дает хорошее представление о виде поверхности  $z = \varphi_2(x, y | \mu, \Lambda)$  нормальной плотности. При  $\rho = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$  эллипсы превращаются в окружности. Когда  $\rho$  приближается к  $+1$  или  $-1$ , эллипсы становятся более тонкими и вытянутыми, что является показателем стремления вероятностной массы сосредотачиваться около общей большей оси этих эллипсов.

Особый интерес представляет эллипс с  $c = 2$ , который называется *эллипсом рассеяния*. Он обладает достаточно высокой вероятностью  $1 - e^{-4} \approx 0.98$  попадания случайной точки  $(X, Y)$  внутрь эллипса и еще одним замечательным свойством: равномерное распределение по области, ограниченной эллипсом рассеяния, имеет те же моменты первого  $(\mu_1, \mu_2)$  и второго  $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\sigma_1\sigma_2)$  порядков, что и нормальное распределение.

В заключение отметим, что двумерное нормальное распределение играет важную роль в *теории стрельб*: распределение координат точек попадания при стрельбе из закрепленного ствола хорошо согласуется с нормальным законом.

## §10. Условное распределение вероятностей. Условное математическое ожидание

Лекция 16

Одной из типичных задач теории вероятностей является прогноз возможного значения случайной величины  $Y$  по результату наблюдения другой случайной величины  $X$ . Примеры таких задач – прогноз метеорологических показателей (температуры воздуха, атмосферного давления, количества осадков) по данным их замеров в прошлом; прогноз стоимости ценных бумаг или обменного курса валюты на ближайшее будущее, причем прогноз осуществляется не столько по значениям этих финансовых показателей на сегодняшний день, сколько по данным информационного центра о состоянии промышленности страны, различных показателей рынка ценных бумаг, их движения, спроса и пр. С аналогичными проблемами мы сталкиваемся в медицине, технике, управлении производством. Легко понять, что во всех этих примерах прогноз носит вероятностный характер, и должен отвечать на вопросы типа: если наблюдается значение  $x$  случайной величины  $X$ , то какова вероятность того, что  $Y$  будет лежать в определенных пределах, каково наиболее вероятное значение  $Y$ , или чему равно среднее значение  $Y$ , если  $X$  приняло значение  $x$ ?

На все эти вопросы легко ответить в случае дискретных распределений случайного вектора  $(X, Y)$ . Пусть  $f^{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$  – совместная функция плотности  $X$  и  $Y$  по считающей мере на борелевской плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда решение задачи прогноза дает *условная функция плотности* – условная вероятность

$$f^{Y|X}(y|x) = P\{Y = y | X = x\} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f^{X,Y}(x, y)}{f^X(x)},$$

где  $f^X(x)$  – маргинальная функция плотности  $X$ . Действительно, вероятность того, что прогнозируемое значение  $Y$  будет лежать в пределах  $(a; b)$  равно условной вероятности

$$P\{Y \in (a; b) | X = x\} = \sum_{y \in (a; b)} f^{Y|X}(y|x),$$

наиболее вероятное значение  $Y$  – это мода условного распределения

$$\text{mod}(Y | X) = \arg \sup_y f^{Y|X}(y|x),$$

ожидаемое (среднее) значение  $Y$  – условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}\{Y | X = x\} = \sum_y y f^{Y|X}(y | x).$$

Но как осуществить аналогичные расчеты в случае непрерывного распределения  $X$ , когда  $P(X = x) = 0$  и на ноль, как известно, делить нельзя? Конечно, и в этом случае можно предложить некоторое “суррогатное”, построенное на аналогиях с дискретным случаем, определение условного распределения, но тем не менее отсутствие строгого определения условной вероятности, пригодного для распределений любого типа, долго тормозило развитие теории вероятностей и ее становление как самостоятельной математической дисциплины. Особенно страдала от этого теория случайных процессов, до тех пор пока в 20-х годах нашего столетия Андрей Николаевич Колмогоров ввел строгое определение условного математического ожидания и условного распределения вероятностей. Увы, это слишком сложная теория, которую мы не сможем постичь с нашими скудными “Вэ-эм-Кашинскими” познаниями в области теории меры. Замечу только, что в этом определении решающую роль играет теорема Радона–Никодима, о которой мы упоминали в §6, когда вводили функцию плотности распределения случайной величины. Кроме того, условное математическое ожидание и условное распределение трактуются как случайные величины, изменение значений которых на множествах нулевой вероятности не влияет на их распределение, и это обстоятельство позволяет исключить из рассмотрения значения  $x$  случайной величины  $X$ , в которых  $f^X(x) = 0$ . Сейчас мы расскажем, как это делается без привлечения теоремы Радона–Никодима, когда совместное распределение  $X$  и  $Y$  принадлежит непрерывному типу (существует плотность  $f^{X,Y}(x, y)$  по мере Лебега на плоскости).

Предположим дополнительно, что совместная функция плотности  $f^{X,Y}(x, y)$  непрерывна по обоим переменным, и изучим асимптотическое поведение условной вероятности  $P\{Y < y | x \leq X < x + \Delta x\}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Понятно, что таким образом мы пытаемся ввести условную функцию плотности  $Y$ , при условии  $X = x$ . По формуле условной вероятности находим

$$P\{Y < y | x \leq X < x + \Delta x\} = \frac{P(Y < y, x \leq X < x + \Delta x)}{P(x \leq X < x + \Delta x)} =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^y dt \int_x^{x+\Delta x} f^{X,Y}(s, t) ds}{\int_x^{x+\Delta x} f^X(s) ds}.$$

Применяя теорему о среднем к интегралам в правой части этого равенства, получаем

$$P\{Y < y | x \leq X < x + \Delta x\} = \frac{\int_{-\infty}^y f^{X,Y}(x + \lambda_1 \Delta x, t) dt \Delta x}{f^X(x + \lambda_2 \Delta x) \Delta x},$$

где  $0 < \lambda_i < 1$ ,  $i = 0, 1$ .

Теперь, используя непрерывность функций  $f^{X,Y}$  и  $f^X$ , мы можем определить условную функцию распределения  $Y$  относительно события  $X = x$ , если устремим в обеих частях последнего неравенства  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$F^{Y|X}(y | x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P\{Y < y | x \leq X < x + \Delta x\} = \frac{\int_{-\infty}^y f^{X,Y}(x, t) dt}{f^X(x)}.$$

Условная функция плотности получается дифференцированием условной функции распределения:

$$f^{Y|X}(y | x) = \frac{d}{dy} F^{Y|X}(y | x) = \frac{f^{X,Y}(x, y)}{f^X(x)}.$$

Удивительно, но мы пришли к той же формуле условной плотности, что и в дискретном случае!

Поскольку значения  $x$ , в которых  $f^X(x) = 0$ , можно вообще исключить из области возможных значений случайной величины  $X$  (эти значения в совокупности дают множество нулевой вероятности), то, подставляя в определении условной плотности вместо  $x$  случайную величину  $X$ , приходим к следующему определению условного распределения и условного математического ожидания для дискретных и непрерывных распределений случайного вектора  $(X, Y)$ .

**Определение 10.1.** Если случайный вектор  $(X, Y)$  имеет дискретную или непрерывную совместную функцию плотности  $f^{X,Y}(x, y)$ , то *условное распределение случайной величины  $Y$  относительно случайной величины*

$X$  определяется функцией плотности

$$f^{Y|X}(y|X) = \frac{f^{X,Y}(y, X)}{f^X(X)}, \quad y \in \mathbb{R},$$

а условное математическое ожидание  $Y$  относительно случайной величины  $X$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{E}\{Y | X\} = \int_{\mathbb{R}} y f^{Y|X}(y|X) d\mu(y).$$

Таким образом, *условное математическое ожидание и условное распределение являются случайными величинами* и определяющие их формулы справедливы для почти всех значений случайной величины  $X$ .

Естественно, мы можем ввести также определение условного математического ожидания измеримой функции  $g(Y)$  относительно случайной величины  $X$ , полагая

$$\mathbf{E}\{g(Y) | X\} = \int_{\mathbb{R}} g(y) f^{Y|X}(y|X) d\mu(y).$$

Если положить  $g(y) = \mathbf{I}_B(y)$  – индикаторной функции борелевского множества  $B$ , то условное математическое ожидание от  $g(Y)$  относительно  $X$  совпадает с условной вероятностью события  $B$ , и, таким образом, условное распределение  $Y$  относительно  $X$  есть частный случай условного математического ожидания:

$$P\{Y \in B | X\} = \mathbf{E}\{\mathbf{I}_B(Y) | X\}.$$

Легко видеть, что условное математическое ожидание обладает всеми свойствами обычного среднего, но ему присущи и некоторые специфические черты.

**Предложение 10.1.** *Для условного математического ожидания  $\mathbf{E}\{Y | X\}$  справедливы равенства*

- (1)  $\mathbf{E}^X \mathbf{E}\{Y | X\} = \mathbf{E}Y$ ,
- (2) *если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\mathbf{E}\{Y | X\} = \mathbf{E}Y$ .*

*Доказательство.* Оба равенства немедленно следуют из определения условного математического ожидания.

(1) Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^X \mathbf{E}\{Y | X\} &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\{Y | x\} f^X(x) d\mu(x) = \\ &= \int_{\mathbf{R}} d\mu(x) \int_{\mathbf{R}} y \frac{f^{X,Y}(x, y)}{f^X(x)} f^X(x) d\mu(y) = \int_{\mathbf{R}} y f^Y(y) d\mu(y) = \mathbf{E}Y.\end{aligned}$$

(2) Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $f^{X,Y}(x, y) = f^X(x) f^Y(y)$ , откуда

$$\mathbf{E}\{Y | X\} = \int_{\mathbf{R}} y \frac{f^X(x) f^Y(y)}{f^X(x)} d\mu(y) = \int_{\mathbf{R}} y f^Y(y) d\mu(y) = \mathbf{E}Y.$$

Теперь мы располагаем некоторой техникой для решения простейших задач прогноза.

### **Наилучший в среднем квадратическом прогнозе ожидаемого значения $Y$ по результату наблюдения $X$ .**

Проблема оптимального предсказания ожидаемого значения  $Y$  по результату  $x$  наблюдения случайной величины  $X$  состоит в отыскании функции  $g(X)$ , которая минимизирует некоторую меру уклонения  $g(X)$  от  $Y$ . Мы будем решать задачу минимизации *среднего квадратического уклонения*  $\mathbf{E}(Y - g(X))^2$ , в котором математическое ожидание вычисляется по совместному распределению  $X$  и  $Y$ . Решение задачи дает

**Предложение 10.2.** *Минимум функционала  $\mathbf{E}(Y - g(X))^2$  достигается на функции  $g^*(X) = \mathbf{E}\{Y | X\}$ .*

**Доказательство.** Используя свойство (1) условного математического ожидания, установленное в предложении 10.1, представим среднее квадратическое уклонение в виде  $\mathbf{E}(Y - g(X))^2 = \mathbf{E}^X \mathbf{E}\{(Y - g(X))^2 | X\}$  и будем минимизировать момент второго порядка  $\mathbf{E}\{(Y - g(X))^2 | X\}$  случайной величины  $Y$  относительно “точки”  $g(X)$ , когда распределение  $Y$  определяется условной функцией плотности  $f^{Y|X}(y | X)$ . В §6 (предложение 6.1, утверждение 4<sup>0</sup>) было показано, что минимум достигается на среднем значении  $Y$  и равен  $\mathbf{D}Y$ . Поскольку в данном случае момент второго порядка вычислялся по условному распределению  $Y$  относительно  $X$ , то минимум достигается на функции (случайной величине)  $g^*(X) = \mathbf{E}\{Y | X\}$ .

Итак, наилучший в среднем квадратическом прогнозе ожидаемого значения  $Y$  по результату  $x$  наблюдения случайной величины  $X$  доставляет

реализация в точке  $X = x$  условного математического ожидания  $\mathbf{E}\{Y | X\}$ . Допуская некоторую вольность, запишем эту реализацию в виде функции  $y = g^*(x) = \mathbf{E}\{Y | X = x\}$ . Функция  $y = g^*(x)$  называется *кривой средней квадратической регрессии*  $Y$  на  $X$ , а минимальное среднее квадратическое уклонение  $\sigma_{Y|X}^2 = \mathbf{E}(Y - g^*(X))^2$  — *остаточной дисперсией*.

Найдем кривую  $g^*(x)$  и вычислим остаточную дисперсию в случае совместного нормального распределения  $X$  и  $Y$ .

**Предложение 10.3.** Пусть  $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Lambda)$ . Тогда кривая средней квадратической регрессии  $Y$  на  $X$  есть прямая

$$y = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1).$$

Остаточная дисперсия  $\sigma_{Y|X}^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$ .

Доказательство. В случае двумерного нормального распределения

$$f^{X,Y}(x, y) = f^{Y|X}(y | x) \cdot f^X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left( \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\},$$

и остается только убедиться, что

$$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

а

$$f^{Y|X}(y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(y - g(x))^2}{2\sigma_2^2(1 - \rho^2)} \right\}, \quad (1)$$

где

$$g(x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1).$$

Маргинальную функцию плотности  $f^X(x)$  компоненты  $X$  мы вычисляли в конце предыдущего параграфа. Перемножая  $f^X(x)$  и  $f^{Y|X}(y | x)$  и производя несложные алгебраические преобразования, убеждаемся, что это произведение равно плотности  $f^{X,Y}(x, y)$  двумерного нормального распределения.

Из формулы (1) находим, что условная плотность имеет среднее значение  $\mathbf{E}\{Y | X = x\} = g(x)$  и дисперсию  $\sigma_2^2(1 - \rho^2)$ , которые совпадают с формулами, приведенными в формулировке предложения.



Легко понять, что если проблема состоит в предсказании значения  $x$  случайной величины  $X$  по наблюдению  $y$  случайной величины  $Y$ , то наилучший в среднем квадратическом прогноз  $x$  имеет вид

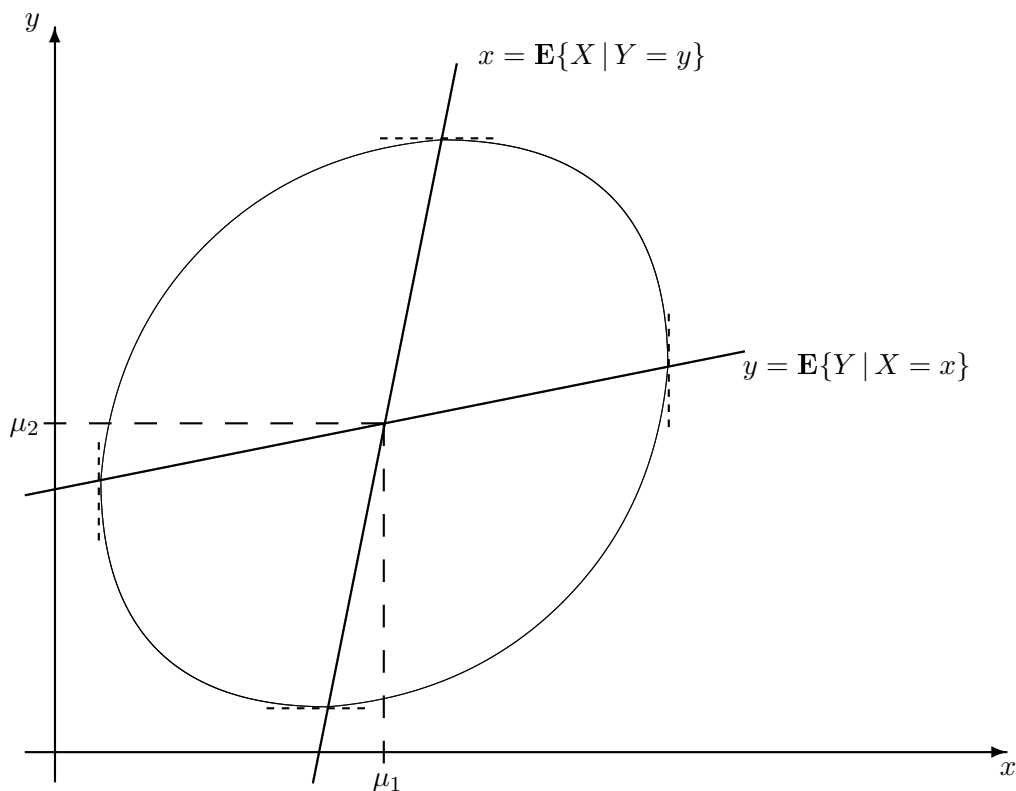
$$x = \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2),$$

что не совпадает с функцией, обратной к

$$y = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1).$$

Это вполне естественно, поскольку мы минимизируем в каждом из этих случаев отклонения от прямой регрессии в различных (перпендикулярных друг к другу) направлениях: одно – вдоль оси  $OY$ , второе – вдоль оси  $OX$ .

Ниже приводится рисунок, иллюстрирующий расположение прямых регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$  относительно главной оси эллипса рассеяния, которая носит название *прямой ортогональной регрессии* и дает наилучший в среднем квадратическом прогноз, когда ошибки измеряются не вдоль координатных осей, а по кратчайшему расстоянию к кривой прогноза  $g(x)$ .



## §11. Сходимость случайных величин и функций распределений

Лекция 17

Для того, чтобы продвинуться дальше в построении новых вероятностных моделей и возможно в большей степени дать математическое основание для применения методов математической статистики к идентификации вероятностных моделей, мы должны изучить проблемы сходимости последовательностей случайных величин и их функций распределения.

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  заданы две случайные величины  $X = X(\omega)$  и  $Y = Y(\omega)$ , имеющих одно и то же распределение вероятностей. В таком случае, с точки зрения приложений теории вероятностей такие случайные величины следует считать эквивалентными (неразличимыми).

**Определение 11.1.** Если  $P(X(\omega) = Y(\omega)) = 1$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *равными почти наверное* или *эквивалентными* и пишется  $X \stackrel{\text{п.н.}}{=} Y$ .

При исследовании предела последовательности случайных величин  $\{X_n, n \geq 1\}$ , заданных на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , мы имеем дело, по существу, с проблемой сходимости последовательности функций  $\{X_n(\omega), n \geq 1\}$ , но при этом мы можем не обращать внимания на множество точек  $\omega$  нулевой вероятности, в которых соответствующие числовые последовательности не имеют предела. Поэтому поточечная (в каждой точке  $\omega \in \Omega$ ) сходимость функций претерпевает существенное изменение и превращается в следующее

**Определение 11.2.** Если для последовательности случайных величин  $\{X_n(\omega), n \geq 1\}$ , заданных на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , существует такая случайная величина  $X = X(\omega), \omega \in \Omega$ , что

$$P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1,$$

то  $X$  называется *пределом последовательности*  $\{X_n, n \geq 1\}$  *почти наверное* и пишется  $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ .

В общей теории меры сходимость почти наверное называется сходимостью *почти всюду*, и это наиболее *сильная* из известных нам форма сходимости функций – случайных величин. Для нее, естественно, справедлив

критерий сходимости Коши: если  $|X_n - X_m| \xrightarrow[\text{п.н.}]{} 0$  при  $n, m \rightarrow \infty$ , то последовательность  $\{X_n, n \geq 1\}$  почти наверное сходится к некоторому пределу  $X$ . Существуют довольно сложные в приложениях достаточные признаки сходимости почти наверное, однако мы практически не будем в дальнейшем касаться этой формы сходимости, поскольку конкретные результаты (например, усиленный закон больших чисел) требуют для своего доказательства огромных временных затрат, – мы не можем позволить себе такой роскоши в рамках того скудного промежутка времени, который отведен нам учебным планом для изучения теории вероятностей и математической статистики. Мы будем, в основном, иметь дело с более “слабой” формой сходимости, которая в общей теории меры называется *сходимостью по мере*, а в теории вероятностей, как вы наверное уже догадываетесь, *сходимостью по вероятности*.

**Определение 11.3.** Последовательность  $\{X_n, n \geq 1\}$  называется сходящейся к пределу  $X$  по вероятности, если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

Сходимость по вероятности обозначается  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

Напомним известный вам из общей теории меры факт: сходимость почти наверное влечет сходимость по вероятности, но обратное, вообще говоря, не верно, и существуют примеры последовательностей, сходящихся по вероятности, но не имеющих предела почти наверное. Однако из всякой сходящейся по вероятности последовательности случайных величин можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к тому же пределу почти наверное.

Мы уже имели дело со сходимостью по вероятности, когда доказывали закон больших чисел Бернулли. Следующий результат обобщает этот закон на суммы независимых случайных величин с достаточно произвольным общим распределением.

**Теорема 11.1 (закон больших чисел Чебышева)** Пусть  $\{X_n, n \geq 1\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом. Тогда

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mathbf{E}X_1.$$

Доказательство проводится столь же просто, как и в случае закона больших чисел Бернулли, когда  $X_k \sim B(1, p)$ , и также основано на использовании неравенства Чебышева  $P(g(X) > c) \leq \mathbf{E}g(X)/c$ . Положим  $g(X) = (\bar{X}_n - \mathbf{E}X_1)^2$  и  $c = \varepsilon^2$ , где  $\varepsilon$  – произвольное положительное число. Тогда

$$P(|\bar{X}_n - \mathbf{E}X_1| > \varepsilon) = P((\bar{X}_n - \mathbf{E}X_1)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbf{E}(\bar{X}_n - \mathbf{E}X_1)^2}{\varepsilon^2}.$$

Поскольку  $\bar{X}_n$  есть нормированная на  $n$  сумма независимых случайных величин с общим конечным средним  $\mu = \mathbf{E}X_1$  и общей дисперсией  $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$ , то

$$\mathbf{E}(\bar{X}_n - \mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_1^n (X_k - \mu) \right]^2 = \frac{1}{n^2} \mathbf{D} \sum_1^n X_k = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Следовательно,

$$P(|\bar{X}_n - \mathbf{E}X_1|) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0,$$

каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ .

Мы покажем в дальнейшем, что в законе больших чисел можно убрать требование о существовании второго момента, – достаточно только существование среднего, но для этого мы должны будем разработать более совершенный математический аппарат анализа сходимости по вероятности последовательностей случайных величин. Отметим пока несомненную практическую ценность установленного закона: при независимых равноточных наблюдениях некоторой постоянной  $\mu$ , характеризующей состояние исследуемого объекта (например, общего содержания серы в партии дизельного топлива), арифметическое среднее  $\bar{X}_n$  результатов параллельных наблюдений, отягченных случайной ошибкой с нулевым средним, является асимптотически точной оценкой  $\mu$  в том смысле, что  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ .

Докажем еще два утверждения, касающиеся сходимости по вероятности, которые обычно называются в монографиях по теории вероятностей *теоремами типа Слуцкого*.

**Предложение 11.1.** Если последовательность случайных величин  $\{X_n, n \geq 1\}$  сходится по вероятности к случайной величине  $X$ , а последовательность случайных величин  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  сходится по вероятности к нулю, тогда (1)  $X_n + \xi_n \xrightarrow{P} X$ , (2)  $X_n \xi_n \xrightarrow{P} 0$ .

Доказательство. (1) Требуется показать, что  $P(|X_n + \xi_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$ , каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ .

Используя неравенство  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq P(|X_n + \xi_n - X| > \varepsilon) &\leq P(|X_n - X| + |\xi_n| > \varepsilon) \leq \\ P\left(\left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) &\leq P\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \\ P\left(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как по условию предложения  $|X_n - X| \xrightarrow{P} 0$  и  $|\xi_n| \xrightarrow{P} 0$ .

(2) По аналогии с (1) сначала делаем оценку вероятности

$$\begin{aligned} P(|X_n \xi_n| > \varepsilon) &= P(|(X_n - X) + X| |\xi_n| > \varepsilon) \leq \\ P(|X_n - X| |\xi_n| + |X| |\xi_n| > \varepsilon) &\leq \\ P\left(|X_n - X| |\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|X| |\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Покажем, что первое слагаемое в правой части (1) стремится к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| |\xi_n| > \varepsilon/2) &\leq P\left(\left\{|X_n - X| > \sqrt{\varepsilon/2}\right\} \cup \left\{|\xi_n| > \sqrt{\varepsilon/2}\right\}\right) \leq \\ P\left(|X_n - X| > \sqrt{\varepsilon/2}\right) + P\left(|\xi_n| > \sqrt{\varepsilon/2}\right) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что второе слагаемое в (1) можно сделать меньше любого  $\delta > 0$ , для всех  $n \geq N = N(\delta)$ , иными словами, покажем, что второе слагаемое также стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . С этой целью введем два противоположных события  $\{|X| > A\}$  и  $\{|X| \leq A\}$ , в которых число  $A$  будет выбрано в дальнейшем по заданному  $\delta$ , и представим второе слагаемое в виде

$$\begin{aligned} P\left(|X| |\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) &= P\left(\left\{|X| |\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \{|X| > A\}\right) + \\ P\left(\left\{|X| |\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \{|X| \leq A\}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части этого представления не превосходит  $P(|X| > A)$ , и мы можем выбрать  $A = A(\delta)$  по заданному  $\delta$  настолько большим, что  $P(|X| > A) < \delta/2$ . Для выбранного таким образом  $A$ , которое не зависит от  $n$ , оценим второе слагаемое в представлении (2):

$$P\left(\left\{|X| \cdot |\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \{|X| \leq A\}\right) \leq$$

$$P\left(A \cdot |\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = P\left(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2A}\right).$$

Поскольку  $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ , то существует такое  $N = N(\delta)$ , что для всех  $n > N$  вероятность

$$P\left(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{2A}\right) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Следует обратить особое внимание на то, как в изучаемых нами видах сходимости почти наверное и по вероятности играет существенную роль задание последовательностей случайных величин на едином вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . По существу, близость членов  $X_n$  с большими значениями  $n$  к их пределу  $X$  зависит не столько от совпадения распределений  $X_n$  и  $X$ , сколько от близости функций  $X_n(\omega)$  и  $X(\omega)$ . Сейчас мы введем еще один вид сходимости случайных величин, более слабый, чем сходимость по вероятности, и для этого вида близость распределений случайных величин становится доминирующей, по сравнению с близостью их как функций на едином пространстве  $\Omega$ ; в этом виде сходимости случайные величины, как компоненты некоторой последовательности, могут быть определены даже на разных пространствах элементарных исходов.

**Определение 11.4.** Последовательность случайных величин  $\{X_n, n \geq 1\}$  сходится к случайной величине  $X$  *слабо* или *по распределению*, если соответствующая последовательность их функций распределения  $\{F_n(x), n \geq 1\}$  сходится к функции распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  в каждой точке непрерывности функции  $F(x)$ .

Слабая сходимость обозначается двойной стрелкой:  $X_n \Rightarrow X$ , и поскольку речь идет не столько о сходимости случайных величин, сколько об их распределениях, то аналогичное обозначение сохраняется и для последовательности функций распределения:  $F_n \Rightarrow F$ , и при этом говорят, что последовательность функций распределения  $\{F_n, n \geq 1\}$  *слабо сходится* к функции  $F(x)$ .

Возникает естественный вопрос: почему в определении слабой сходимости ограничиваются только точками непрерывности предельной функции  $F(x)$ ? Дело в том, что без этого условия последовательность  $\{X_n, n \geq 1\}$  и, например, “сдвинутая” на бесконечно малую величину последовательность  $\{X_n + 1/n, n \geq 1\}$  могут иметь различные “слабые” пределы, а это – нехорошо.

Приведем пример последовательности случайных величин, которая сходится по распределению, но не имеет предела по вероятности.

**Пример 11.1.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathcal{A}$  – борелевская  $\sigma$ -алгебра подмножеств этого отрезка и  $P$  – равномерное распределение  $U(0, 1)$ . На вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  введем последовательность случайных величин  $\{X_n, n \geq 1\}$ , полагая  $X_n(\omega) = (-1)^n$ , если  $0 \leq \omega \leq 1/2$ , и  $X_n(\omega) = (-1)^{n-1}$ , если  $1/2 < \omega \leq 1$ . Все случайные величины последовательности имеют одну и ту же функцию распределения  $F(x)$ , определяемую вероятностями  $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = 1/2$ , так что  $\{X_n, n \geq 1\}$  сходится по распределению. Однако эта последовательность состоит из чередующейся пары различных случайных величин: все члены последовательности с четными номерами  $X_{2k}$  принимают значения  $+1$  при  $0 \leq \omega \leq 1/2$ , в то время как соседний член  $X_{2k+1}$  с нечетным номером на этом отрезке равен  $-1$ . Следовательно, не существует случайной величины  $X = X(\omega)$ ,  $\omega \in [0; 1]$  одинаково близкой при больших  $n$  ко всем  $X_n$  в смысле малости вероятности  $P(|X_n - X| > \varepsilon)$ .

Естественно, представляют несомненный интерес достаточные условия, при выполнении которых слабая сходимость влечет сходимость по вероятности. Одно из таких условий дает

**Предложение 11.2.** Если последовательность  $X_n \Rightarrow C (\equiv \text{const})$ , то  $X_n \xrightarrow{P} C$ .

**Доказательство.** Будем трактовать постоянную  $C$  как вырожденную случайную величину с функцией распределения  $F(x) = 0$  при  $x \leq C$  и  $F(x) = 1$  при  $x > C$ . По условию предложения соответствующая последовательность функций распределения  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  при любом  $x \neq C$ , ибо  $C$  – единственная точка разрыва предельной функции распределения  $F(x)$ . Требуется показать, что  $P(|X_n - C| > \varepsilon) \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ , каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ .

Выразим вероятность  $P(|X_n - C| > \varepsilon)$  через функцию распределения  $F_n(x)$ :

$$\begin{aligned} P(|X_n - C| > \varepsilon) &= P(X_n - C > \varepsilon) + P(X_n - C < -\varepsilon) = \\ &= P(X_n < C - \varepsilon) + 1 - P(X_n \leq C + \varepsilon) = \\ &= F_n(C - \varepsilon) + 1 - F_n(C + \varepsilon) - P(X_n = C + \varepsilon). \end{aligned}$$

Так как  $C - \varepsilon$  и  $C + \varepsilon$  — точки непрерывности функции  $F(x)$ , то  $F_n(C - \varepsilon) \rightarrow 0$ , а  $F_n(C + \varepsilon) \rightarrow 1$ . Остается показать, что  $P(X_n = C + \varepsilon) \rightarrow 0$ . Имеем

$$0 \leq P(X_n = C + \varepsilon) \leq P\left(C + \frac{\varepsilon}{2} \leq X_n < C + \frac{3\varepsilon}{2}\right) = \\ F_n\left(C + \frac{3\varepsilon}{2}\right) - F_n\left(C + \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0,$$

поскольку  $C + 3\varepsilon/2$  и  $C + \varepsilon/2$  есть точки непрерывности предельной функции  $F(x)$ , в которых она принимает одно и то же значение 1.

Теперь мы приступим к построению критерия слабой сходимости, развивая попутно новую и очень сильную технику построения вероятностных моделей.



## §12. Характеристические функции. Теоремы единственности и сложения

Лекция 18

Мы введем сейчас одну из интереснейших функциональных характеристик случайной величины  $X$ , которая единственным образом определяет распределение  $X$ . С ее помощью можно найти все моменты  $X$  без вычисления интегралов, вычисляя производные от этой характеристики. Наконец, она представляет универсальный инструмент для вывода распределений сумм независимых случайных величин, поэтому с ее помощью можно просто и без громоздких выкладок доказывать предельные теоремы типа тех, что мы называли интегральной предельной теоремой Муавра–Лапласа.

**Определение 12.1.** *Характеристической функцией  $\varphi(t)$  случайной величины  $X$  с функцией плотности  $f(x)$  по мере  $\mu$  называется преобразование Фурье–Лебега  $f(x)$  :*

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{itX} = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} f(x) d\mu(x).$$

Напомним, что в преобразованиях Фурье  $\mathbf{i}$  – мнимая единица, так что  $e^{itx} = \cos(tx) + \mathbf{i} \sin(tx)$ , и интеграл, определяющий  $\varphi(t)$  представляет собой интеграл от функции комплексного переменного (криволинейный интеграл второго рода) по действительной оси  $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ .

Характеристическая функция существует при любом распределении  $X$ , поскольку  $|e^{itx}| = 1$ , откуда

$$|\varphi(t)| \leq \int_{\mathbf{R}} |e^{itx}| f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x) d\mu(x) = 1.$$

Если  $d\mu(x) = dx$  – мера Лебега, то  $\varphi(t)$  есть обычное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

если же  $\mu$  – считающая мера, то  $\varphi(t)$  представляет дискретный аналог преобразования Фурье

$$\varphi(t) = \sum_x e^{itx} f(x).$$

Рассмотрим несколько интересных примеров по вычислению характеристических функций известных нам распределений.

Пример 12.1 (*биномиальное распределение*  $B(n, p)$ ). Характеристическая функция вычисляется простым суммированием биномиального ряда:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathbf{E}e^{itX} = \sum_{x=0}^n e^{itx} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \\ &= \sum_{x=0}^n C_n^x (e^{it}p)^x (1-p)^{n-x} = (pe^{it} + (1-p))^n.\end{aligned}$$

Пример 12.2 (*распределение Пуассона*  $P(\lambda)$ ). Используем известное разложение Маклорена для показательной функции:

$$\varphi(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!} = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

Пример 12.3 (*равномерное распределение*  $U(a, b)$ ). Характеристическая функция представляет собой криволинейный интеграл по отрезку  $[a; b]$  действительной прямой:

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx = \frac{1}{b-a} \int_{[a;b]} e^{itz} dz.$$

Поскольку  $e^{itz}$  есть аналитическая функция, то интеграл равен разности значений первообразной этой функции в конечных точках отрезка интегрирования:

$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Пример 12.4 (*показательное распределение*  $E(\theta)$ ). Характеристическая функция снова представляется криволинейным интегралом от аналитической функции, но на сей раз по бесконечному промежутку  $[0; \infty)$  действительной прямой:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} \exp\{itx - x\theta^{-1}\} dx = \frac{1}{\theta} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{[0;A]} \exp\{z(it - \theta^{-1})\} dz =$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp\{A(\mathbf{i}t - \theta^{-1})\}}{1 - \mathbf{i}t\theta}.$$

Однако

$$|\exp\{A(\mathbf{i}t - \theta^{-1})\}| = \exp\{-A\theta^{-1}\} |\exp\{\mathbf{i}At\}| = \exp\{-A\theta^{-1}\},$$

и так как  $\theta > 0$ , то

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \exp\{A(\mathbf{i}t - \theta^{-1})\} = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - \mathbf{i}t\theta}.$$

Можно, конечно, обойтись и без этой комплексной зауми, а просто воспользоваться формулой Эйлера  $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i} \sin z$  и каким-нибудь справочником по интегралам (например, родным “Демидовичем”, а лучше всего справочником по интегральным преобразованиям).

Пример 12.5 (*распределение Коши*  $C(0, 1)$ ). Используя формулу Эйлера, найдем характеристическую функцию стандартного (параметр сдвига  $a = 0$ , параметр масштаба  $b = 1$ ) распределения Коши:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx + \mathbf{i} \sin tx}{1 + x^2} dx.$$

Интеграл от синуса (так называемое *синус-преобразование Фурье*) равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно начала координат промежутку, а для нахождения косинус-преобразования Фурье воспользуемся четностью функции  $\cos x$  и ответом к примеру N 3825 задачника Демидовича:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{1 + x^2} dx = e^{-|t|}.$$

Пример 12.6 (*стандартное нормальное распределение*  $N(0, 1)$ ). Рассуждая так же, как и в случае распределения Коши, и используя ответ к примеру N 3809, получаем

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos tx \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}.$$

Характеристические функции распределений Коши и нормального при произвольных значениях параметров можно получить просто линейной заменой переменной интегрирования, но легко видеть, что справедлива общая формула для семейств распределений, зависящих от параметров сдвига и масштаба.

**Предложение 12.1.** *Характеристическая функция  $\varphi_X(t)$  случайной величины  $X$  обладает следующими свойствами.*

$$1^0. \varphi(0) = 1, \quad |\varphi(t)| \leq 1.$$

$$2^0. \varphi_{bX+a} = e^{ita} \varphi_X(bt).$$

3<sup>0</sup>. Если  $X_1, \dots, X_n$  независимы в совокупности, то

$$\varphi_{\sum_1^n X_k}(t) = \prod_1^n \varphi_{X_k}(t);$$

в частности, если  $X_1, \dots, X_n$  независимы и одинаково распределены, то

$$\varphi_{\sum_1^n X_k}(t) = (\varphi_{X_1}(t))^n.$$

4<sup>0</sup>. Характеристическая функция  $\varphi(t)$  равномерно непрерывна на всей действительной оси  $\mathbb{R}$ .

5<sup>0</sup>. Если случайная величина  $X$  обладает моментами  $\alpha_k = \mathbf{E}X^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то

$$\alpha_k = \mathbf{i}^{-k} \varphi^{(k)}(0)$$

и для характеристической функции справедливо разложение Тейлора

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{i}t)^k}{k!} \alpha_k + o(t^n), \quad t \rightarrow 0.$$

*Доказательство.* 1<sup>0</sup>. Это свойство, по существу, было установлено сразу же после определения характеристической функции, когда мы рассуждали о ее существовании.

2<sup>0</sup>. По определению характеристической функции

$$\varphi_{bX+a}(t) = \mathbf{E}e^{\mathbf{i}t(bX+a)} = e^{ita} \mathbf{E}e^{\mathbf{i}btX} = e^{ita} \varphi_X(bt).$$

3<sup>0</sup>. Опять работаем с определением характеристической функции:

$$\varphi_{\sum_1^n X_k}(t) = \mathbf{E} \exp \left\{ it \sum_1^n X_k \right\} = \mathbf{E} \prod_1^n e^{itX_k} = \prod_1^n \mathbf{E} e^{itX_k} = \prod_1^n \varphi_{X_k}(t).$$

Естественно, если  $X_1, \dots, X_n$  одинаково распределены, то произведение в правой части последнего равенства состоит из одинаковых сомножителей и мы получаем  $\varphi_{X_1}^n(t)$ .

4<sup>0</sup>. Требуется доказать, что  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \rightarrow 0$ , когда  $h \rightarrow 0$ . Оценим приращение характеристической функции:

$$\begin{aligned} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= \\ \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) f(x) d\mu(x) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| |e^{ihx} - 1| |f(x)| d\mu(x) = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(\cos hx - 1)^2 + \sin^2 hx} |f(x)| d\mu(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2(1 - \cos hx)} |f(x)| d\mu(x). \end{aligned}$$

Так как  $0 \leq 1 - \cos hx \leq 1$ , то последний интеграл сходится равномерно (признак Вейерштрасса) и можно переходить к пределу при  $h \rightarrow 0$  под знаком интеграла. Но

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - \cos hx) = 0,$$

каково бы ни было  $x \in \mathbb{R}$ . Следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2(1 - \cos hx)} |f(x)| d\mu(x) = 0,$$

откуда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \rightarrow 0.$$

5<sup>0</sup>. Формальное дифференцирование  $k$  раз под знаком интеграла в формуле, определяющей характеристическую функцию, приводит нас к соотношению

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathbf{i}^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} f(x) d\mu(x).$$

Если  $k$ -ый момент  $\alpha_k$  существует, то (напомним,  $|e^{itx}| = 1$ )

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x) d\mu(x) < \infty,$$

поскольку существование интеграла Лебега от функции влечет его существование от модуля этой функции. Таким образом, в силу признака Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно, формальное дифференцирование под знаком интеграла оправдано, и мы получаем искомую формулу для вычисления моментов случайной величины  $X$ , полагая  $t = 0$ :  $\varphi^{(k)}(0) = \mathbf{i}^k \alpha_k$ .

Итак, существование момента  $k$ -го порядка влечет существование  $k$ -ой производной в точке  $t = 0$  функции  $\varphi(t)$ . Если существует  $n$  моментов, то можно воспользоваться формулой Тейлора и получить асимптотическое ( $t \rightarrow 0$ ) разложение характеристической функции:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^k) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{i}t)^k}{k!} \alpha_k + o(t^k).$$

Используя свойство 2<sup>0</sup>, легко находим характеристическую функцию распределений  $C(a, b)$  и  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Если  $X \sim C(0, 1)$ , то  $bX + a \sim C(a, b)$ , и характеристическая функция распределения Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi b [1 + ((x - a)/b)^2]}$$

равна (см. пример 12.5)  $\varphi_{bX+a}(t) = \exp\{\mathbf{i}at - b|t|\}$ . Аналогично, если  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , и характеристическая функция нормального распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

равна (см. пример 12.6)  $\varphi_{\sigma X + \mu}(t) = \exp\{\mathbf{i}\mu t - \sigma^2 t^2/2\}$ .

Из всех свойств характеристической функции, установленных в предложении 12.1, наиболее привлекательным кажется свойство  $\mathfrak{Z}^0$ , позволяющее находить характеристическую функцию суммы независимых случайных величин по характеристическим функциям слагаемых – открываются новые возможности в построении вероятностных моделей. Но при этом возникает естественный вопрос: существует ли взаимно однозначное соответствие между характеристическими функциями и функциями распределения (или плотности). Из курса математического анализа мы знаем, что на каждое преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

существует обратное преобразование

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt, \quad (1)$$

хотя, насколько мне известно, доказательства этой формулы обращения вам не давалось. Тем не менее, информацию о справедливости теоремы единственности вы получили, и мы теперь восполним пробел в вашем образовании, доказав аналогичную теорему для более общего преобразования Фурье–Лебега.

**Теорема 12.1.** (*формула обращения Леви*). Если  $F(x)$  – функция распределения с.в.  $X$ , а  $\varphi(t)$  – ее характеристическая функция, то для любых точек непрерывности  $x$  и  $y$  функции  $F(x)$  имеет место формула обращения

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi(t) dt. \quad (2)$$

**Доказательство.** Заметим сначала, что правая часть формулы обращения (2) представляет собой несобственный интеграл в смысле главного значения, так как  $\varphi(t)$  может оказаться неинтегрируемой функцией. Если существует  $f(x) = dF(x)/dx$  и характеристическая функция  $\varphi(t)$  интегрируема, то (2) нетрудно получить из формулы обращения преобразования Фурье (1) проинтегрировав обе части (1) в пределах от  $x$  до  $y$ .

Обратимся теперь непосредственно к доказательству формулы (2), для чего рассмотрим при  $y > x$  интеграл

$$J_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(u-x)} - e^{it(u-y)}}{it} f(u) d\mu(u),$$

в котором  $\varphi(t)$  заменена на определяющий ее интеграл. Легко видеть, что при фиксированных  $x$  и  $y$  подынтегральная функция

$$\frac{e^{it(u-x)} - e^{it(u-y)}}{t}$$

в области  $|u| < \infty$ ,  $|t| < \infty$  непрерывна и ограничена, поэтому можно изменить порядок интегрирования:

$$J_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-A}^A \frac{e^{it(u-x)} - e^{it(u-y)}}{it} dt \right] f(u) d\mu(u).$$

Преобразуем внутренний интеграл  $I_A$  в пределах от  $-A$  до  $A$ , для чего представим его в виде суммы интегралов по отрезкам  $[-A, 0]$  и  $[0, A]$  и в интеграле по отрезку  $[-A, 0]$  сделаем замену  $t$  на  $-t$ . В результате получим

$$I_A = \int_0^A \left[ \frac{e^{it(u-x)} - e^{-it(u-x)}}{it} - \frac{e^{it(u-y)} - e^{-it(u-y)}}{it} \right] dt =$$

$$2 \int_0^A \left[ \frac{\sin(t(u-x))}{t} - \frac{\sin(t(u-y))}{t} \right] dt,$$

поскольку (формула Эйлера)  $(e^{iz} - e^{-iz})/2i = \sin z$ .

Вычисляя интеграл Дирихле

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha,$$

получаем следующее выражение для правой части (2):

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(u-x) - \operatorname{sgn}(u-y)] f(u) d\mu(u).$$



Представим последний интеграл в виде суммы трех интегралов по отрезкам  $(-\infty, x]$ ,  $[x, y]$  и  $[y, \infty)$ , на которых, соответственно,  $\operatorname{sgn}(u-x) = \operatorname{sgn}(u-y) = -1$ ,  $\operatorname{sgn}(u-x) = -\operatorname{sgn}(u-y) = +1$ ,  $\operatorname{sgn}(u-x) = \operatorname{sgn}(u-y) = 1$ . Тогда этот интеграл, а следовательно, и правая часть (2), принимает окончательный вид

$$\int_x^y f(u) d\mu(u) = F(y) - F(x),$$

устанавливающий справедливость формулы обращения (2).

Итак, теперь можно не сомневаться, что, получив каким-либо способом характеристическую функцию наблюдаемой случайной величины  $X$ , мы, по сути дела, уже построили вероятностную модель, и остается только, используя формулу (2), найти функцию распределения  $X$ . Проиллюстрируем этот метод построения модели на одной из центральных задач *теории восстановления*, имеющей большие применения в практике и теории надежности систем, подвергаемых в процессе их эксплуатации ремонту (восстановлению), профилактике и резервированию компонент с высокой частотой отказа.

**Гамма-распределение  $G(\lambda, \theta)$ .** Рассматривается система, долговечность которой определяется моментом отказа  $X_1$  ее отдельного элемента. Предположим, что  $X_1 \sim E(\theta)$ , то есть функционирование элемента протекает в рамках постулата “отсутствие последствия”. Система имеет резерв, состоящий из  $n - 1$  таких же элементов, и при отказе работающего элемента мгновенно подключается запасной. Таким образом, общая долговечность системы определяется реализацией случайной величины  $X = \sum_1^n X_i$ , в которой слагаемые независимы и одинаково распределены по показательному закону  $E(\theta)$  с характеристической функцией (см. пример 12.4)  $\varphi_1(t) = (1 - i\theta t)^{-1}$ .

В силу пункта 3<sup>0</sup> предложения 12.1 характеристическая функция  $X$  равна  $\varphi(t) = (1 - i\theta t)^{-n}$ . Применяя обратное преобразование Фурье к  $\varphi(t)$  (советую воспользоваться справочником – такие интегралы на нашем богородном факультете считать теперь не учат), получаем функцию плотности распределения долговечности

$$f(x) = f(x | n, \theta) = \frac{1}{(n-1)! \theta^n} x^{n-1} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x > 0,$$

(естественно,  $f(x) = 0$  при  $x \leq 0$ ).

Как будет видно в дальнейшем, полученное распределение долговечности с заменой целочисленного параметра  $n$  на произвольный положительный параметр  $\lambda$  описывает долговечность не только резервированных (или восстанавливаемых при отказе) систем, но и долговечность систем, подверженных износу, старению, накоплению усталости, в общем, всему тому, что постепенно накапливается, а потом приводит к “гибели”. В связи с этими замечаниями мы определяем *гамма-распределение*  $G(\lambda, \theta)$  посредством функции плотности

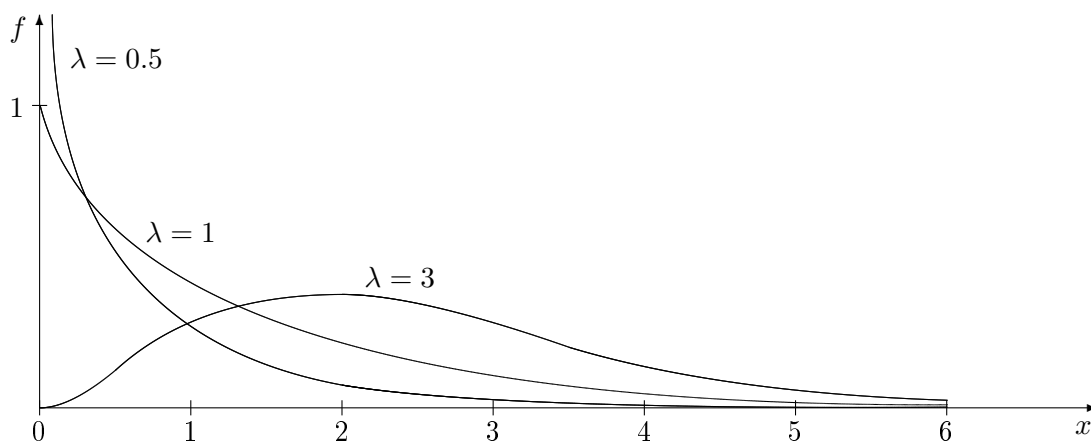
$$f(x | \lambda, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x > 0; \lambda > 0, \theta > 0,$$

где

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx$$

– гамма-функция Эйлера.

Семейство двухпараметрических гамма-распределений  $\{G(\lambda, \theta), (\lambda, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}$  содержит, как частный случай, показательное распределение ( $\lambda = 1$ ). Гамма-распределение унимодально: если  $\lambda \leq 1$ , то  $\text{mod}X = 0$ , а при  $\lambda > 1$  мода  $\text{mod}X = \theta(\lambda - 1)$ .



У гамма-распределения существуют моменты любого порядка:

$$\alpha_k = \mathbf{E}X^k = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda} \int_0^{\infty} x^{\lambda+k-1} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} dx =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda + k)\theta^{\lambda+k}}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda} = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - k + 1)\theta^k.$$

В частности,  $\mathbf{E}X = \lambda\theta$ ,  $\mathbf{D}X = \lambda\theta^2$ .

Теперь, используя аппарат характеристических функций, мы можем составить каталог изученных нами распределений, для которых справедлива теорема сложения.

**Предложение 12.2.** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  независимы и  $S_n = \sum_1^n X_k$ . Тогда,

$$1^0 \text{ если } X_k \sim B(m_k, p), \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{то } S_n \sim B\left(\sum_1^n m_k, p\right);$$

$$2^0 \text{ если } X_k \sim P(\lambda_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{то } S_n \sim P\left(\sum_1^n \lambda_k\right);$$

$$3^0 \text{ если } X_k \sim C(a_k, b_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{то } S_n \sim C\left(\sum_1^n a_k, \sum_1^n b_k\right);$$

$$4^0 \text{ если } X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2), \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{то } S_n \sim N\left(\sum_1^n \mu_k, \sum_1^n \sigma_k^2\right);$$

$$5^0 \text{ если } X_k \sim G(\lambda_k, \theta), \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{то } S_n \sim G\left(\sum_1^n \lambda_k, \theta\right).$$

Доказательство. Следующая таблица характеристических функций отдельных слагаемых  $X_k$  и суммы  $S_n$  устанавливает справедливость всех утверждений предложения.

1<sup>0</sup>  $B(m, p)$  :

$$\varphi_{X_k}(t) = (pe^{it} + 1 - p)^{m_k}, \quad \varphi_{S_n}(t) = (pe^{it} + 1 - p)^{\sum_1^n m_k};$$

2<sup>0</sup>  $P(\lambda)$  :

$$\varphi_{X_k}(t) = \exp\{\lambda_k(e^{it} - 1)\}, \quad \varphi_{S_n}(t) = \exp\left\{\sum_1^n \lambda_k(e^{it} - 1)\right\};$$

3<sup>0</sup>  $C(a, b)$  :

$$\varphi_{X_k}(t) = \exp\{it a_k - |t| b_k\}, \quad \varphi_{S_n}(t) = \exp\left\{it \sum_1^n a_k - |t| \sum_1^n b_k\right\};$$

4<sup>0</sup>  $N(\mu, \sigma^2)$  :

$$\varphi_{X_k}(t) = \exp\left\{it \mu_k - \frac{t^2}{2} \sigma_k^2\right\}, \quad \varphi_{S_n}(t) = \exp\left\{it \sum_1^n \mu_k - \frac{t^2}{2} \sum_1^n \sigma_k^2\right\};$$

5<sup>0</sup>  $G(\lambda, \theta)$  :

$$\varphi_{X_k}(t) = (1 - \mathbf{i}\theta t)^{-\lambda_k}, \quad \varphi_{S_n}(t) = (1 - \mathbf{i}\theta t)^{-\sum_1^n \lambda_k}.$$

Несколько слов о характеристической функции многомерного распределения. Если  $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$  – случайный вектор с функцией плотности  $f_n(x^{(n)}) = f_n(x_1, \dots, x_n)$  по мере  $d\mu_n(x^{(n)}) = d\mu_1(x_1) \cdots \cdots d\mu_n(x_n)$ , то характеристическая функция определяется как  $n$ -мерное преобразование Фурье-Лебега

$$\varphi_n(t^{(n)}) = \mathbf{E} \exp \left\{ \mathbf{i} \left( t^{(n)}, X^{(n)} \right) \right\} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ \mathbf{i} \sum_1^n t_k x_k \right\} f_n(x^{(n)}) d\mu_n(x^{(n)}).$$

Очень просто, по прямой аналогии с биномиальным распределением, находится характеристическая функция мультиномиального распределения, и столь же просто, если воспользоваться ответом к задаче N 4220 из Демидовича, характеристическая функция  $n$ -мерного нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$  :

$$\varphi_n(t^{(n)}) = \exp \left\{ \mathbf{i} \sum_1^n \mu_k t_k - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \lambda_{jk} t_j t_k \right\}.$$

Для многомерной характеристической функции также справедливы теоремы единственности и утверждения, аналогичные предложению 12.1. Используя аппарат многомерных характеристических функций, можно показать, что для мультиномиального и многомерного нормального распределений справедливы теоремы сложения, и доказать следующее удивительное свойство многомерного нормального распределения: *любое линейное преобразование  $Y^{(m)} = \mathbf{A}X^{(n)}$  (с матрицей  $\mathbf{A}$  размерности  $n \times m$ ) случайного вектора  $X^{(n)} \sim \mathcal{N}(\mu, \Lambda)$  дает случайный вектор, имеющий  $m$ -мерное нормальное распределение со средним  $\mu\mathbf{A}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{A}\Lambda\mathbf{A}'$ .*

### §13. Характеристические функции. Критерий слабой сходимости

Лекция 20–21

Следующая теорема дает удобный критерий слабой сходимости распределений случайных величин.

**Теорема 13.1.** Пусть  $\{\varphi_n, n \geq 1\}$  – последовательность характеристических функций и  $\{F_n, n \geq 1\}$  – последовательность соответствующих функций распределений. Если при любом фиксированном  $t \in \mathbf{R}$  последовательность характеристических функций сходится к некоторой непрерывной в точке  $t = 0$  функции  $\varphi(t)$ , то  $\varphi(\cdot)$  есть характеристическая функция некоторой случайной величины  $X$  с функцией распределения  $F(\cdot)$  и  $F_n \Rightarrow F$ . Обратно, если  $F_n \Rightarrow F$  и  $F(\cdot)$  есть функция распределения, то  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  при любом  $t \in \mathbf{R}$  и  $\varphi(\cdot)$  – характеристическая функция случайной величины  $X$  с функцией распределения  $F(\cdot)$ .

Доказательство этой теоремы (в монографиях по теории вероятностей она обычно называется *теоремой непрерывности* для последовательностей характеристических функций) основано на ряде вспомогательных утверждений о слабой сходимости функций распределений.

**Лемма 13.1.** Всякая последовательность функций распределения  $\{F_n, n \geq 1\}$  содержит подпоследовательность  $\{F_{n_k}, k \geq 1\}$ , слабо сходящуюся к некоторой ограниченной неубывающей и непрерывной слева функции  $F(\cdot)$ , т.е.  $F_{n_k}(x) \rightarrow F(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  в любой точке  $x$  непрерывности функции  $F(\cdot)$ .

**Замечание 13.1.** Если последовательность  $\{F_n(x), n \geq 1\}$  сходится в каждой точке  $x$ , то предельная функция  $F(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  может и не быть функцией распределения, хотя, очевидно,  $F(\cdot)$  не убывает и ее изменение на  $\mathbf{R}$ :  $\text{var}F = \sup_x F(x) - \inf_x F(x) \leq 1$ , ибо таковы функции распределения  $F_n(\cdot)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Пример такой последовательности дают функции  $F_n(\cdot)$  равномерных распределений на отрезках  $[n; n+1]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $F_n(x) = 0$  при  $x < n$ , то для любого  $x \in \mathbf{R}$  существует такое  $N$  (достаточно взять  $N$  больше  $x$ ), что  $F_n(x) = 0$  для всех  $n \geq N$ . Следовательно,  $F_n(x) \rightarrow F(x) \equiv 0$  и  $\text{var}F = 0$ .

Доказательство леммы 13.1. Начнем с выбора подпоследовательности  $\{F_{n_k}, k \geq 1\}$ , которая сходится слабо к некоторому пределу  $F$ , обладающему указанными свойствами.

Пусть  $\mathcal{D} = \{r_n, n \geq 1\}$  – счетное всюду плотное в  $\mathbb{R}$  множество, например, множество рациональных чисел. Числовая последовательность  $\{F_n(r_1), n \geq 1\}$  ограничена, и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность  $\{F_{1n}(r_1), n \geq 1\}$ . Пусть  $F_1(r_1)$  – предел этой подпоследовательности. Рассмотрим теперь последовательность чисел  $\{F_{1n}(r_2), n \geq 1\}$ ; она также содержит сходящуюся подпоследовательность  $\{F_{2n}(r_2), n \geq 1\}$  с некоторым пределом  $F_2(r_2)$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{2n}(r_1) = F_1(r_1),$$

ибо  $\{F_{2n}(r_1), n \geq 1\}$  – подпоследовательность сходящейся к  $F_1(r_1)$  последовательности  $\{F_{1n}(r_1), n \geq 1\}$ . Точно так же последовательность  $\{F_{2n}(r_3), n \geq 1\}$  содержит подпоследовательность  $\{F_{3n}(r_3), n \geq 1\}$  с пределом  $F_3(r_3)$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{3n}(r_2) = F_2(r_2), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{3n}(r_1) = F_1(r_1),$$

ибо  $\{F_{3n}(r_1), n \geq 1\} \subseteq \{F_{2n}(r_1), n \geq 1\} \subseteq \{F_{1n}(r_1), n \geq 1\}$  – индексы каждой последующей подпоследовательности выбирались из множества индексов предыдущей. Продолжая этот процесс, мы убеждаемся, что для любого  $k \geq 1$  число  $F_k(r_k)$  есть общий предел всех последовательностей  $\{F_{jn}(r_k), n \geq 1\}$ ,  $j = k, k+1, \dots$ , причем каждая последующая последовательность есть подпоследовательность предыдущей.

Рассмотрим диагональную последовательность  $\{F_{nn}(r_k), n \geq 1\}$ . За исключением первых  $k-1$  членов ее последующие члены выбираются по одному из рассмотренных выше последовательностей, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{nn}(r_k) = F_k(r_k).$$

Тем самым для всех  $x \in \mathcal{D}$  определена неубывающая функция  $F_0(x)$ , равная  $F_k(r_k)$ , если  $x = r_k$ , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{nn}(x) = F_0(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Функция  $F_0(\cdot)$  ограничена и не убывает на  $\mathcal{D}$ , ибо этими свойствами обладает каждый член последовательности  $\{F_{nn}, n \geq 1\}$ . Теперь определим  $F(x)$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ , полагая

$$F(x) = \sup_{r < x, r \in \mathcal{D}} F_0(r).$$

Покажем, что  $F(\cdot)$  – искомая функция, то есть она (1) не убывает, (2) непрерывна слева и (3)  $F_{nn}(x) \rightarrow F(x)$  в каждой точке  $x$  непрерывности функции  $F$ .

(1) Монотонность  $F$  следует из аналогичного свойства  $F_0$ : если  $x \leq y$ , то

$$F(x) = \sup_{r < x} F_0(r) \leq \sup_{r < y} F_0(r) = F(y).$$

(2) Непрерывность слева функции  $F$  в любой точке  $x \in \mathbb{R}$  вытекает из определения точной верхней грани и монотонности функций  $F$  и  $F_0$ . Требуется доказать, что для любых  $\varepsilon > 0$  и  $x \in \mathbb{R}$  существует такое  $y_0 = y_0(\varepsilon, x) < x$ , что  $0 \leq F(x) - F(y) \leq \varepsilon$  при любом  $y \in (y_0, x)$ . По определению супремума существует такая возрастающая (супремальная) последовательность  $\{r_k, k \geq 1\} \subset \mathcal{D}$ , что  $r_k < x$  при  $\forall k = 1, 2, \dots$  и

$$\lim_k \uparrow F_0(r_k) = F(x).$$

Следовательно, существует такое  $K = K(\varepsilon)$ , что при  $\forall k \geq K$  выполняется неравенство  $0 \leq F(x) - F_0(r_k) < \varepsilon$ . Но для любого  $y \geq r_K$  имеет место неравенство  $F_0(r_K) \leq \sup_{r < y} F_0(r) = F(y)$ , и поэтому  $0 \leq F(x) - F(y) \leq \varepsilon$ , каково бы ни было  $y \geq r_K = y_0$ . Итак,  $F$  непрерывна слева.

(3) Покажем теперь, что  $F_{nn} \Rightarrow F$ , то есть в любой фиксированной точке  $x$  непрерывности функции  $F(\cdot)$ , начиная с некоторого  $n$ , выполняется неравенство  $|F_{nn}(x) - F(x)| < \varepsilon$ , каково бы ни было наперед заданное число  $\varepsilon > 0$ .

Начнем с того, что в силу только что установленной непрерывности слева функции  $F(\cdot)$  по заданному  $\varepsilon$  всегда можно подобрать такие  $x', x'' \in \mathbb{R}$  и  $r', r'' \in \mathcal{D}$ , что  $x' < r' < x < r'' < x''$ , и при этом  $0 < F(x'') - F(x) < \varepsilon/2$  и  $0 < F(x) - F(x') < \varepsilon/2$ .

Так как  $F_{nn}(r) \rightarrow F_0(r)$  при  $\forall r \in \mathbf{D}$ , то, начиная с некоторого  $n > N(\varepsilon)$ , выполняется неравенство  $|F_{nn}(r) - F_0(r)| < \varepsilon/2$ , и поэтому  $F_{nn}(x) - F(x) \leq F_{nn}(r'') - F(x) = [F_{nn}(r'') - F_0(r'')] + [F_0(r'') - F(x)] \leq \varepsilon/2 + F_0(r'') - F(x)$ , а также  $F(x) - F_{nn}(x) \leq F(x) - F_{nn}(r') = [F(x) - F_0(r')] + [F_0(r') - F_{nn}(r')] \leq F(x) - F_0(r') + \varepsilon/2$ . Для доказательства сходимости  $F_{nn}(x)$  к  $F(x)$  достаточно показать, что  $F_0(r'') \leq F(x'')$ , а  $F_0(r') \geq F(x')$ , а затем воспользоваться неравенством  $F(x'') - F(x) < \varepsilon/2$ . Но это почти очевидно, поскольку выполняются строгие неравенства  $x' < r'$  и  $r'' < x''$ . Действительно,

$$F_0(r'') \leq \sup_{r < x''} F_0(r) = F(x'')$$

и, аналогично,

$$F_0(r') \geq \sup_{r < r'} F_0(r) = F(r') \geq F(x').$$

Следовательно,  $F_0(r'') - F(x) \leq F(x'') - F(x) \leq \varepsilon/2$  и  $F(x) - F_0(r') \leq F(x) - F(x') \leq \varepsilon/2$ , откуда  $-\varepsilon \leq F_{nn}(x) - F(x) \leq \varepsilon$ .

Условимся, начиная с этого момента, записывать интеграл Лебега

$$\int_B g(x) dP(x), \quad B \in \mathfrak{B}$$

по вероятностной мере  $P$  на борелевской прямой  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  как

$$\int_B g(x) dF(x),$$

используя тем самым вместо  $P$  функцию распределения  $F$ , которая, в силу теоремы 4.1, однозначно определяет распределение вероятностей  $P$ .

**Лемма 13.2.** *Для того, чтобы последовательность функций распределений  $\{F_n, n \geq 1\}$  слабо сходилась к некоторой функции распределения  $F(\cdot)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной и ограниченной функции  $g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x). \quad (1)$$

*Доказательство. Необходимость.* Оценим разность

$$\Delta_n = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \right|$$

и покажем, что  $\Delta_n$  можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно большое  $n$ , если  $F_n \Rightarrow F$ .

Зададимся некоторым  $\varepsilon > 0$  и выберем на оси  $\mathbb{R}$  такие точки  $a$  и  $b$ , чтобы  $F(x)$  была непрерывной в  $a$  и  $b$  и чтобы  $F(a) < \varepsilon$  и  $1 - F(b) < \varepsilon$ . Поскольку  $F_n \Rightarrow F$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a) = F(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(b) = F(b)$$

и, следовательно,

$$F_n(a) \leq F(a) + \varepsilon, \quad F_n(b) \geq F(b) - \varepsilon, \quad (2)$$

начиная с некоторого  $n > N(\varepsilon)$ .



Разобьем каждый из интегралов, участвующих в определении  $\Delta_n$ , на сумму трех интегралов по промежуткам  $[-\infty; a]$ ,  $[a; b]$ ,  $[b; +\infty]$ . Тогда  $\Delta_n \leq \Delta_{1n} + \Delta_{2n} + \Delta_{3n}$ , где

$$\Delta_{1n} = \left| \int_{-\infty}^a g dF - \int_{-\infty}^a g dF_n \right|, \quad \Delta_{2n} = \left| \int_a^b g dF - \int_a^b g dF_n \right|,$$

$$\Delta_{3n} = \left| \int_b^{\infty} g dF - \int_b^{\infty} g dF_n \right|.$$

Положим  $M = \sup_x |g(x)| < \infty$  (напомним, функция  $g$  ограничена) и оценим  $\Delta_{1n}$  и  $\Delta_{3n}$ . Используя (2), получаем

$$\Delta_{1n} \leq \int_{-\infty}^a |g| dF + \int_{-\infty}^a |g| dF_n \leq M(F(a) + F_n(a)) \leq M(2F(a) + \varepsilon) \leq 3M\varepsilon,$$

$$\Delta_{3n} = \int_b^{\infty} |g| dF + \int_b^{\infty} |g| dF_n \leq M(1 - F(b) + 1 - F_n(b)) \leq 3M\varepsilon,$$

ибо  $F(a) < \varepsilon$  и  $1 - F(b) < \varepsilon$ . Таким образом,  $\Delta_{1n}$  и  $\Delta_{3n}$  стремятся к нулю с ростом  $n$ . Покажем, что аналогичное заключение можно сделать относительно  $\Delta_{2n}$ .

Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $N$  частей точками  $x_1, \dots, x_{N-1}$ , выбрав их так, чтобы они оказались точками непрерывности  $F(\cdot)$  (это возможно в силу известного свойства функции распределения: она имеет не более чем счетное множество скачков, и поэтому не может быть целого промежутка, состоящего из точек разрыва  $F(\cdot)$ ). Итак, пусть  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ .

Так как функция  $g(\cdot)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ , то на конечном отрезке  $[a; b]$  она равномерно непрерывна. Следовательно, при достаточно большом  $N$  разность  $|g(x) - g(x_k)| < \varepsilon$  при  $x_k \leq x < x_{k+1}$  и любом  $k = 0, \dots, N$ . Введем ступенчатую функцию  $g_\varepsilon(x)$ , положив ее равной  $g(x_k)$ , если  $x \in [x_k; x_{k+1})$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ , и обратимся к оценке  $\Delta_{2n}$ . Имеем

$$\Delta_{2n} = \left| \int_a^b (g - g_\varepsilon + g_\varepsilon) dF - \int_a^b (g - g_\varepsilon + g_\varepsilon) dF_n \right| \leq$$

$$\left| \int_a^b (g - g_\varepsilon) dF \right| + \left| \int_a^b (g - g_\varepsilon) dF_n \right| + \left| \int_a^b g_\varepsilon dF - \int_a^b g_\varepsilon dF_n \right|.$$

Каждое из первых двух слагаемых в правой части не превосходит  $\varepsilon$ , поскольку  $|g - g_\varepsilon| < \varepsilon$ ,  $F(b) - F(a) \leq 1$  и  $F_n(b) - F_n(a) \leq 1$ , а для последнего слагаемого имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g_\varepsilon dF - \int_a^b g_\varepsilon dF_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dF(x) - \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dF_n(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \{ (F(x_{k+1}) - F(x_k)) - (F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k)) \} \right| \leq \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |g(x_k)| \{ |F(x_{k+1}) - F_n(x_{k+1})| + |F(x_k) - F_n(x_k)| \}. \end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства меньше наперед заданного  $\varepsilon > 0$ , поскольку  $N$  фиксировано,  $|g(x)| \leq M$ , а  $F_n(x_k) \rightarrow F(x_k)$  при любом  $k = 0, \dots, N$ . Итак,  $\Delta_{2n}$  сколь угодно мало и, следовательно,  $\Delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Достаточность.* Пусть выполняется (1). Для любого  $\varepsilon > 0$  и любой точки  $x$  непрерывности  $F$  рассмотрим непрерывную функцию  $f_\varepsilon(t)$ , принимающую значение 1 при  $t < x$ , значение 0, если  $t > x + \varepsilon$ , и меняющуюся линейно на  $[x; x + \varepsilon]$ . Так как

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_\varepsilon(t) dF_n(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dF_n(t),$$

то в силу (1)

$$\limsup_n F_n(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dF(t) \leq \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} dF(t) = F(x + \varepsilon).$$

Аналогично, с помощью функции  $f_\varepsilon^*(t) = f_\varepsilon(t + \varepsilon)$  получаем неравенство

$$F_n(x) \geq \int_{-\infty}^x f_\varepsilon^*(t) dF_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^*(t) dF_n(t),$$

откуда

$$\liminf_n F_n(x) \geq \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^*(t) dF(t) \geq F(x - \varepsilon).$$

Следовательно,  $F(x - \varepsilon) \leq \liminf_n F_n(x) \leq \limsup_n F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$ , а так как  $x$  — точка непрерывности  $F$ , то в силу произвольности  $\varepsilon$  имеем равенство

$$\liminf_n F_n(x) = \limsup_n F_n(x) = \lim_n F_n(x) = F(x).$$

**Замечание 13.2.** В большинстве монографий по теории вероятностей слабая сходимость распределений определяется соотношением (1) – именно таким образом можно распространить понятие слабой сходимости на векторные случайные величины (или случайные величины с абстрактным пространством их значений). Слабая сходимость распределений обозначается тем же символом  $P_n \Rightarrow P$ .

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы установить критерий слабой сходимости.

Доказательство теоремы непрерывности 13.1. Если  $F_n \Rightarrow F$ , то

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \varphi(t)$$

(достаточно применить лемму 13.1 к ограниченной непрерывной функции  $g(x) = e^{itx}$ ).

Пусть теперь последовательность характеристических функций  $\{\varphi_n, n \geq 1\}$  сходится к некоторой непрерывной в точке  $t = 0$  функции  $\varphi(t)$ , и  $\{F_n, n \geq 1\}$  – соответствующая последовательность функций распределения. Требуется доказать, что  $\varphi$  – характеристическая функция случайной величины с функцией распределения  $F$  и  $F_n \Rightarrow F$ .

В силу леммы 13.1 из последовательности  $\{F_n, n \geq 1\}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{F_{n_k}, k \geq 1\}$ , слабо сходящуюся к некоторой неубывающей, непрерывной слева функции  $F$ , причем  $0 \leq F(x) \leq 1$ . Если  $\text{var}F = 1$ , то есть  $F$  – функция распределения, то (см.(1))  $\varphi_{n_k}(t) \rightarrow \varphi_0(t)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , при любом  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\varphi_0(\cdot)$  – характеристическая функция, соответствующая функции распределения  $F(\cdot)$ . Так как последовательность  $\{\varphi_n(t), n \geq 1\}$  сходится, то все ее подпоследовательности имеют один и тот же предел  $\varphi(t)$ , откуда  $\varphi_0(t) = \varphi(t)$  и  $\varphi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  – характеристическая функция. Наконец, в силу теоремы единственности 12.1 все подпоследовательности последовательности  $\{F_n, n \geq 1\}$  имеют один и тот же слабый предел  $F$ , характеристическая функция которого есть  $\varphi$ , откуда  $F_n \Rightarrow F$ .

Итак, осталось показать, что  $\text{var}F = 1$ .

Допустим противное  $\text{var}F = \delta < 1$ . Так как  $\varphi(\cdot)$  непрерывна в точке  $t = 0$  и  $\varphi(0) = 1$ , ибо  $\varphi_n(0) = 1$  при любом  $n = 1, 2, \dots$ , то для любого  $\varepsilon \in (0; 1 - \delta)$  существует отрезок  $[-\tau, \tau]$ , на котором  $|1 - \varphi(t)| <$

$\varepsilon/2 = \varepsilon - \varepsilon/2 < 1 - \delta - \varepsilon/2$ . Функция  $\varphi(\cdot)$  интегрируема на любом отрезке  $[-\tau, \tau]$ , так как она есть предел интегрируемых на  $[-\tau, \tau]$  и ограниченных функций  $\varphi_n(\cdot)$  (см. начало доказательства формулы обращения). Следовательно, (напомним,  $|a| - |b| \leq |a - b|$ )

$$1 - \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} (1 - \varphi(t)) dt \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |1 - \varphi(t)| dt < 1 - \delta - \varepsilon/2,$$

откуда,

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) dt \right| > \delta + \varepsilon/2. \quad (3)$$

Неравенство (3) получено нами только из предположения непрерывности функции  $\varphi(\cdot)$  в точке  $t = 0$ . Покажем теперь, что из сделанного нами предположения  $\text{var} F = \delta < 1$ , вытекает неравенство, противоположное (3). Пусть  $F_{n_k} \Rightarrow F$ , а соответствующая последовательность характеристических функций  $\varphi_{n_k}(t) \rightarrow \varphi(t)$  при  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Имеем

$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t) dt \right| = \left| \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{n_k}(x) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) =$$

$$\int_{|x| > A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) + \int_{|x| \leq A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x),$$

где  $A$  – некоторое положительное число. Так как  $F(A) - F(-A) \leq \text{var} F \leq \delta$ , то  $F_{n_k}(A) - F_{n_k}(-A) < \delta + \varepsilon/4$ , начиная с некоторого  $k$ . Учитывая, что интеграл

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt = \frac{e^{i\tau x} - e^{-i\tau x}}{ix} = \frac{2 \sin(\tau x)}{x}$$

и, следовательно, по модулю не превосходит  $2\tau$  (напомним,  $|\sin x| \leq |x|$ ), получаем

$$\int_{|x| \leq A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) \leq 2\tau(\delta + \varepsilon/4),$$

$$\int_{|x|>A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) = 2 \int_{|x|>A} \left| \frac{\sin(\tau x)}{x} \right| dF_{n_k}(x) \leq$$

$$\int_{|x|>A} \frac{2}{|x|} dF_{n_k}(x) \leq \frac{2}{A}.$$

Если выбрать  $A = 4/\tau\varepsilon$ , то

$$\frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t) dt \right| \leq \delta + \varepsilon/2,$$

что противоречит (3) при  $k \rightarrow \infty$  и, следовательно, предположению  $\delta = \text{var}F < 1$ . Итак,  $F$  – функция распределения,  $\varphi$  – соответствующая ей характеристическая функция и  $F_n \Rightarrow F$ .

## §14. Предельные теоремы теории вероятностей

Лекция 22

Характеристические функции являются весьма мощным инструментом для построения вероятностных моделей и позволяют без особых технических сложностей получить известные нам законы теории вероятностей, значительно расширяя их область действия. Сейчас мы получим более сильный, чем П.Л. Чебышева, закон больших чисел и обобщим предельную теорему Муавра–Лапласа на суммы независимых случайных величин с произвольным общим законом распределения.

**Теорема 14.1 (закон больших чисел Хинчина).** Пусть  $\{X_n, n \geq 1\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием  $\mu = \mathbf{E}X_1$ . Тогда

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mu.$$

*Доказательство.* В силу конечности первого момента характеристическая функция каждого слагаемого допускает асимптотическое представление (предложение 12.1, п. 5<sup>0</sup>)  $\varphi_{X_k}(t) = 1 + it\mu + o(t)$ . Из свойств 2<sup>0</sup> и 3<sup>0</sup> предложения 12.1 следует, что

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = \left(1 + it\frac{\mu}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Очевидно,  $\varphi_{\bar{X}_n}(t) \rightarrow \varphi(t) = e^{it\mu}$ , функция  $\varphi(\cdot)$  непрерывна в точке  $t = 0$  и соответствует характеристической функции константы  $\mu$  – случайной величине, принимающей значение  $\mu$  с вероятностью единица.

Таким образом, в силу теоремы непрерывности 13.1  $\bar{X}_n \Rightarrow \mu$ , а поскольку слабая сходимость к постоянной влечет сходимость по вероятности (предложение 11.2), то  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ .

Наиболее сильный результат в законах больших чисел принадлежит А.Н.Колмогорову, который доказал, что при существовании математического ожидания  $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu$ . Конечно, нам, как всегда, не хватает времени доказать что-нибудь стоящее, и если в §11 я вводил понятие сходимости почти наверное, то это делалось только для того, чтобы сейчас хотя бы упомянуть об усиленном законе больших чисел А.Н.Колмогорова.

А что будет, если отказаться от условия конечности или существования среднего значения  $\mathbf{E}X_1$ ? Следующий пример показывает, что сходимости к постоянной величине не будет.

**Пример (нарушения закона больших чисел.)** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  независимы и одинаково распределены по закону Коши  $C(0, 1)$ . Характеристическая функция стандартного ( $a = 0, b = 1$ ) распределения Коши  $\varphi(t) = \exp\{-|t|\}$ , характеристическая функция суммы  $S_n = \sum_1^n X_k$  равна  $\varphi^n(t) = \exp\{-n|t|\}$ , наконец, характеристическая функция нормированной суммы  $\bar{X}_n = S_n/n$  равна  $\varphi^n(t/n) = \exp\{-|t|\}$ , и мы снова получили то же самое стандартное распределение Коши! Конечно, внутри каждого из нас теплилась надежда, что  $\bar{X}_n$  будет сходиться при  $n \rightarrow \infty$  к моде распределения Коши  $\text{mod}(X_1) = 0$ , но, увы, законы природы (математики) неумолимы и, вычисляя арифметическое среднее любого количества реализаций случайных величин с распределением Коши, мы также будем (в среднем) далеки от моды, как и на первом шаге нашего статистического эксперимента.

Изучим теперь более подробно асимптотическое ( $n \rightarrow \infty$ ) распределение  $\sum_1^n X_k$ .

**Теорема 14.2 (центральная предельная теорема).** Пусть  $\{X_n, n \geq 1\}$  – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечными математическим ожиданием  $\mathbf{E}X_1 = \mu$  и дисперсией  $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$ . Тогда при любом  $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{\sum_1^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

**Доказательство.** Рассуждения те же, что и при выводе закона больших чисел, но используется существование двух моментов у  $X_k$ . В силу п. 5<sup>0</sup> предложения 12.1 характеристическая функция нормированной случайной величины  $Y_k = (X_k - \mu)/\sigma$ , у которой  $\mathbf{E}Y_k = 0$  и  $\mathbf{D}Y_k = 1$ , допускает асимптотическое ( $t \rightarrow 0$ ) представление

$$\varphi_{Y_k}(t) = \left( 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right).$$

Теперь, в силу п. 2<sup>0</sup> предложения 12.1, характеристическая функция нор-

мированной суммы

$$\bar{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n Y_k = \frac{\sum_1^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

имеет асимптотику

$$\varphi_{\bar{S}_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n.$$

Очевидно,

$$\varphi_{\bar{S}_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2},$$

если  $n \rightarrow \infty$ , а это, как нам известно из §12, есть характеристическая функция стандартного нормального распределения  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Поскольку предельная нормальная функция  $\Phi(x)$  непрерывна на всем  $\mathbb{R}$ , то функция распределения  $\bar{S}_n$  сходится к  $\Phi(x)$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ .

Существуют обширнейшие исследования по распределениям сумм случайных величин, в которых центральная предельная теорема обобщается на случай “слабо зависимых” или разно распределенных, но обладающих одинаковым порядком малости, случайных величин; рассматриваются суммы случайных векторов и суммы случайных элементов, принимающих значения в абстрактных пространствах, и т.д., и т.п., так что не перестаешь удивляться, как это можно что-то еще сделать в области того, где, кажется, все

уже сделано. Мы не будем углубляться в эту обширнейшую тематику и займемся более прикладными вопросами – продолжим построение вероятностных моделей, математической основой которых служат предельные теоремы теории вероятностей.

**Вероятностные модели роста.** Условимся употреблять терминологию, связанную с биологическими исследованиями; о приложениях к другим областям естествознания поговорим ниже, после вывода основного уравнения модели.

Предположим, что мы посадили с вами маленькое деревце (саженец) высоты  $x_0$ , и во все последующие годы производим замеры  $x_1, x_2, \dots$  высоты растущего дерева. Нас интересуют прогноз высоты дерева по истечении  $n$  лет. Естественно, на ежегодный прирост высоты действует огромное количество природных факторов: температура, осадки, солнечное освещение,



плодородие почвы и т.п., поэтому мы, очевидно, имеем дело со стохастическим прогнозом, который формулируется, примерно, как следующее заключение: “Через 60 лет с вероятностью 0,9 высота дерева будет не меньше 15 метров.” Конечно, такой прогноз, как и в случае однократного подбрасывания монеты, нельзя применить к одному посаженному дереву, но его можно использовать в прогнозе “зрелости” лесной посадки, состоящей из большого числа деревьев, и тогда наше заключение будет относиться приблизительно к 90% саженцев.

Итак, мы должны трактовать замеры  $x_1, x_2, \dots$  в терминах реализаций компонент последовательности случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  и попытаться формализовать в математических терминах причину “разброса” в значениях ежегодных приращений  $\Delta_k = X_k - X_{k-1}$  высоты дерева. Естественно предположить, что прирост  $\Delta_k$  вызван суммарным действием всех тех причин роста, о которых мы говорили выше, то есть действием некоторого неотрицательного “импульса”  $\xi_k (\geq 0)$ . Между  $\Delta_k$  и  $\xi_k$  существует приближенная линейная связь  $\Delta_k = \alpha_k \xi_k$ , где  $\alpha_k$  зависит от высоты  $X_{k-1}$  дерева, которой оно достигло по истечении  $k$  лет. Положим  $\alpha_k = g(X_{k-1})$  с естественным условием неотрицательности и непрерывности функции  $g(\cdot)$ . Таким образом, мы приходим к рекуррентным соотношениям, которые описывают ежегодный прирост высоты дерева,

$$X_k - X_{k-1} = \xi_k g(X_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Нам осталось только сделать некоторые предположения, касающиеся распределения случайных величин  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Будем считать, что эти случайные величины неотрицательны, независимы, одинаково распределены и обладают конечными моментами второго порядка: средним значением  $a = \mathbf{E}\xi_k$  и дисперсией  $b^2 = \mathbf{D}\xi_k$ .

Напомним, что мы интересуемся распределением случайной величины  $X_n$ , реализация  $x_n$  которой указывает размер конкретного дерева по истечении  $n$  лет. Перепишем первые  $n$  рекуррентных соотношений (1) в виде

$$\xi_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{g(X_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, n$$

и просуммируем левые и правые части этих равенств. В результате получим

$$\sum_1^n \xi_k = \sum_1^n \frac{X_k - X_{k-1}}{g(X_{k-1})}.$$

Если каждый импульс вызывает незначительный прирост дерева, то есть все  $\Delta_k = X_k - X_{k-1}$  малы, то, трактуя правую часть последнего равенства как интегральную сумму, получаем приближенное равенство

$$\sum_1^n \xi_k = \int_{x_0}^X \frac{dt}{g(t)}, \quad (2)$$

где  $X = X_n$  – окончательный размер дерева.

Так как функция  $g(x)$  положительна, то интеграл в правой части (2) представляет собой некоторую монотонно возрастающую функцию  $h(X)$ . Применение центральной предельной теоремы 14.2 к левой части (2) приводит к утверждению: по истечении достаточно большого срока после посадки дерева ( $n \gg 1$ ) распределение его высоты  $X$  определяется соотношением  $h(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , где  $\mu = na$ ,  $\sigma^2 = nb^2$ . В силу монотонности функции  $h(\cdot)$

$$F(x) = P(X < x) = P(h(X) < h(x)) = \Phi\left(\frac{h(x) - \mu}{\sigma}\right).$$

Осталось решить проблему с выбором функции  $g(\cdot)$ . Если постулировать, что прирост высоты дерева пропорционален достигнутой высоте, то есть положить  $g(t) = t$ , а именно такое предположение наиболее часто используется в моделях роста, то мы придем к следующему распределению случайной величины  $X$ .

### Логарифмически-нормальное распределение $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ .

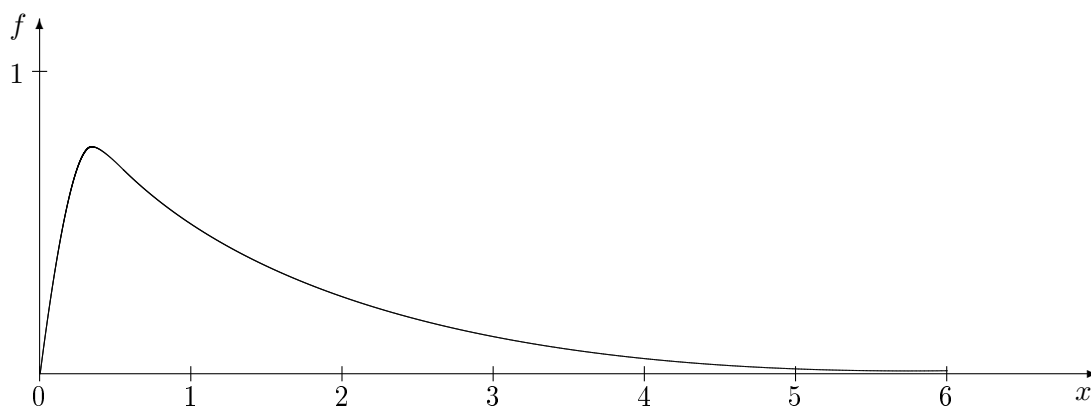
При  $g(t) = t$  интеграл в правой части (2) с точностью до постоянного слагаемого  $-\ln x_0$  равен  $\ln X$ , так что  $\ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , и функция распределения  $X$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), \quad x > 0;$$

функция плотности

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Это унимодальное, резко асимметричное ( $\gamma_1 > 0$ ) распределение, график плотности которого имеет следующий вид:



Конечно, в практических приложениях целесообразнее оперировать не с  $X$ , а с его натуральным логарифмом  $Y = \ln X$ , после чего производить все расчеты, используя модель нормального распределения.

Логарифмически-нормальный закон носит достаточно универсальный характер. Этому распределению подчиняется размер трещины в испытуемом образце материала, который подвергается циклическим нагрузениям “на изгиб” – вы можете сами без особых фантазийных усилий пересказать наши построения с высотой дерева в терминах размера трещины. Аналогичные рассуждения могут быть также применены в изучении роста доходов у отдельных лиц достаточно однородной человеческой популяции. Проводимые в этом направлении статистические исследования указывают на хорошее согласие с логарифмически-нормальным распределением достаточно низких доходов, в то время как для умеренных и высоких доходов более подходящим является распределение Парето.

В рамках построенной нами модели роста часто возникает задача, которую можно трактовать как некоторую альтернативу к проблеме вывода распределения размера, достигнутого к определенному сроку “растущим” объектом исследования. Пусть фиксирован некоторый уровень  $x$  размера (дерева, трещины, дохода) и нас интересует распределение момента времени (номера цикла), на котором этот размер будет достигнут. Удивительно, что в рамках нашей модели это распределение не зависит от выбора положительной функции  $g(\cdot)$ , и получить его можно путем следующих тривиальных рассуждений.

**Распределение Бирнбаума–Саундерса  $BS(\lambda, \theta)$ .** Пусть  $\tau$  – случайная величина, реализующая момент достижения заданного размера  $x$ . Тогда событие  $\tau > n$  эквивалентно событию  $X_n < x$  (напомним, все  $\xi_k \geq 0$ )

– к моменту времени  $n$  высота дерева еще не достигла уровня  $x$ . Итак,

$$P(\tau > n) = P(X_n < x) = P(h(X_n) < h(x)) = \Phi\left(\frac{h(x) - na}{b\sqrt{n}}\right). \quad (3)$$

Заменим теперь  $n$  на “непрерывную” переменную  $t$  и введем новые параметры  $\lambda$  и  $\theta$ , определив их уравнениями  $\lambda\sqrt{\theta} = h(x)/b$ ,  $\lambda/\sqrt{\theta} = a/b$ . Цепочка равенств (3) позволяет нам записать распределение случайного момента времени  $\tau$ , в который дерево (трещина, доход,) достигнет заданного уровня  $x$ :

$$F(t) = P(\tau < t) = 1 - \Phi\left(\lambda\left(\sqrt{\frac{\theta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\theta}}\right)\right), \quad t > 0.$$

Это унимодальное распределение, которое называется *распределением Бирнбаума–Саундерса*, и мы будем обозначать его  $BS(\lambda, \theta)$ . График плотности  $BS$ -распределения (я, надеюсь, вы достаточно образованы в области математического анализа, чтобы найти производную от  $F(t)$ ) очень похож на функцию плотности гамма-распределения.  $BS$ -распределение играет большую роль при расчетах надежности объектов, долговечность которых определяется развитием трещин, приводящих к гибели объекта.

Рассмотрим еще одно распределение, часто используемое в практических расчетах надежности сложных систем.

**Распределение Вейбулла  $W(\lambda, \theta)$**  (*модель слабого звена*). Имеется цепь, состоящая из большого числа  $n$  звеньев. Допустим, что прочности  $x_1, \dots, x_n$  отдельных звеньев можно трактовать как реализации  $n$  независимых, одинаково распределенных случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ . На оба конца цепи подается равномерно возрастающая нагрузка, и фиксируется напряжение, при котором происходит разрыв цепи. Очевидно это напряжение равно прочности наислабейшего звена цепи, поэтому его можно трактовать как реализацию случайной величины

$$X = \min_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Если  $F(x)$  – функция распределения каждого  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то функция распределения  $X$  определяется посредством следующих расчетов, в которых существенно используется независимость  $X_1, \dots, X_n$ :

$$G_n(x) = P(X < x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - P(X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x) =$$

$$1 - \prod_{k=1}^n P(X_k \geq x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

При больших  $n$  естественно вместо  $G_n(x)$  использовать ее асимптотику. Однако при каждом фиксированном  $x (> 0)$  вероятность  $G_n(x) \rightarrow 1$ , если  $n \rightarrow \infty$ , и поэтому мы должны провести нормировку  $X$  по аналогии с тем, как это делалось в центральной предельной теореме, чтобы распределение не вырождалось, когда  $n \rightarrow \infty$ . Понятно также, что  $X$  по вероятности сходится к нулю, поэтому нормировку  $X$  следует производить домножением на некоторую растущую функцию от  $n$ . При этом нам не избежать условий на поведение функции распределения  $F(x)$  при  $x \rightarrow 0+$  – допустим, что  $F(x) \sim ax^\lambda$ , где  $a$  и  $\lambda$  – неотрицательные числа (удивительно, но все изученные нами распределения, сосредоточенные на положительной полуоси, удовлетворяют этому условию).

Функция распределения  $W(x)$  нормированной случайной величины  $Y = n^{1/\lambda}X$  не вырождается с ростом  $n$ , и предельное распределение находится с помощью следующих выкладок:

$$\begin{aligned} W(x) &= P(Y < x) = P\left(X < \frac{x}{n^{1/\lambda}}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n^{1/\lambda}}\right)\right)^n \sim \\ &1 - \left(1 - a\left(\frac{x}{n^{1/\lambda}}\right)^\lambda\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{ax^\lambda}{n}\right)^n \sim 1 - e^{-ax^\lambda}. \end{aligned}$$

Заменяя параметр  $a$  на параметр  $\theta$ , определяемый уравнением  $a = \theta^{-\lambda}$ , получаем *распределение Вейбулла*  $W(\lambda, \theta)$  с функцией распределения

$$W(x | \lambda, \theta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\lambda\right\}, \quad x > 0, \quad \lambda, \theta > 0.$$

Это также унимодальное распределение, график функции плотности которого “на глаз” не отличим от графика функции плотности гамма-распределения. Вейбулловскому распределению обычно следуют долговечности систем, состоящих из большого числа однотипных элементов (например, плата компьютера), отказ одного из которых (наислабейшего) приводит к отказу системы.

## §15. Случайные процессы

Лекция 23

До сих пор мы изучали распределение конечного числа случайных величин  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ , заданных на едином вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , и вывод их совместного распределения сводился, по существу, к построению распределения вероятностей на произведение измеримых пространств значений этих величин (произведении борелевских прямых). Теперь мы приступаем к изучению распределений на бесконечном (возможно несчетном) произведении измеримых пространств. Допустим, что на пространстве элементарных исходов  $\Omega$  задано семейство случайных величин  $\{X_t, t \in T\}$ ,  $X_t = X_t(\omega)$ , индексированных параметром  $t$ , который пробегает множество значений  $T$  (например, векторная случайная величина имеет  $T = \{1, \dots, n\}$ ). Пусть  $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$ ,  $t \in T$  – измеримые пространства значений  $X_t$ , соответствующие каждому  $t \in T$ . В дальнейшем будет рассматривать только случай  $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{B}_t$  подмножеств  $\mathbb{R}$ , но для понимания конструкции распределений на бесконечномерных пространствах важно сохранить индекс  $t$  в обозначении пространств значений каждого представителя семейства  $\{X_t, t \in T\}$ . Это семейство называется *случайным процессом*.

Если зафиксировать некоторый элементарный исход  $\omega_0$ , то получим функцию  $x(t) = X_t(\omega_0)$  на множестве  $T$  со значениями при каждом фиксированном  $t$  в  $\mathcal{X}_t$ . Эта функция называется *траекторией* или реализацией процесса  $X_t, t \in T$ . В связи с этим понятием следует трактовать случайный процесс как случайную функцию  $X_t = X(t)$ , помня при этом, что вся “случайность” состоит в зависимости  $X(t)$  от  $\omega \in \Omega$ , в то время как траектория  $x(t)$  есть “значение” случайного процесса  $X(t)$  при фиксированном  $\omega$ . Приведем несколько примеров случайных процессов и опишем вид их траекторий.

**Пример 15.1 (точечные процессы).** На телефонную станцию поступают заявки на междугородние разговоры, и при этом фиксируется время поступления заявки. В таких процессах с появлением определенных событий в случайные моменты времени обычно полагают  $x(t)$  равной числу заявок, поступивших за промежуток времени  $[0, t]$ . Эти процессы служат хорошими математическими моделями при проектировании систем обслуживания (модели теории очередей), при анализе транспортных потоков на магистралях; они используются в ядерной физике, метеорной астрономии

и т.п. Множество  $T$  в данном случае – отрезок  $\mathbb{R}_+$  вида  $[0, T]$  с возможным бесконечным значением  $T$ . Пространство  $\mathcal{X}_t$  значений случайного процесса при любом  $t \in T$  совпадает с множеством неотрицательных целых чисел. Траектория имеет вид ступенчатой функции, возрастающей скачками в случайные моменты времени, и величина каждого скачка равна единице.

**Пример 15.2** (*ветвящиеся процессы*). Наблюдается некоторая биологическая популяция, состоящая из особей, способных размножаться и гибнуть. Такие данные, как число потомков в определенном колене отдельной особи, численность популяции к фиксированному моменту времени  $t$ , количества погибших и новорожденных особей и т.п., составляют особый интерес для популяционной генетики, и трудно переоценить роль вероятностных моделей в изучении динамики развития биологической популяции. Аналогичные модели используются в физике элементарных частиц, особенно при изучении ядерных реакций. Пространства  $T$  и  $\mathcal{X}_t$  те же, что и в первом примере, траектории также имеют вид ступенчатых функций, но величины скачков – произвольные целые числа.

**Пример 15.3** (*броуновское движение в капилляре*). Длинный тонкий капилляр наполняется жидкостью, и в середину капилляра помещается частица, диаметр которой не намного меньше диаметра капилляра. Под действием молекул жидкости частица совершает хаотические движения, и для наблюдения за ними вводится система координат: капилляр рассматривается как действительная ось  $\mathbb{R}$  с нулем в середине капилляра. В каждый момент времени  $t$  (непрерывно) регистрируется расстояние  $x(t)$  частицы от середины капилляра (естественно,  $x(0) = 0$ ) с учетом знака (минус – слева от середины, плюс – справа). Если изобразить теперь траекторию движения частицы на плоскости в координатах  $(t, x(t))$ , то мы получим то, что физики называют траекторией одномерного броуновского движения. Вероятностные модели, определяющие распределения таких процессов, были предложены Винером, Эйнштейном и Смолуховским. В этом примере  $T$  – отрезок временной оси,  $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$ .

**Пример 15.4** (*броуновское движение на плоскости*). В центр кювета, наполненного тонким слоем жидкости, помещается частица некоторого вещества, которая, как и в предыдущем примере совершает броуновское движение, но не на прямой  $\mathbb{R}$ , а на плоскости  $\mathbb{R}^2$  (центр кювета служит началом декартовой системы координат  $(x, y)$ ). Траектория броуновского движения представляет собой некоторую кривую на плоскости, определя-

емую параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Естественно,  $T$  – отрезок времени, а  $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}^2$ .

**Пример 15.5 (случайное поле.)** Отшлифованная поверхность металла обычно подвергается проверке на “шероховатость”, для чего она помещается под микроскоп и замеряются некоторые характеристики отклонения различных точек поверхности металла от плоского уровня. Такая шероховатая поверхность  $z = z(u, v)$ , где  $(u, v)$  – фиксированная система декартовых координат, трактуется как реализация *случайного поля*  $Z = Z(u, v)$ , пространство  $T$  соответствует части плоскости  $\mathbb{R}^2 = \{u, v\}$ , занимаемой обрабатываемым объектом,  $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$ . Пример случайного поля, в котором кроме координат  $(u, v)$  пространство  $T$  включает временную ось  $\mathbb{R}_+$ , – участок поверхности моря во время шторма.

Зададимся вопросом, какого рода события, связанные с рассмотренными случайными процессами  $X(t)$ , представляют наибольший интерес для их исследователей? В первую очередь следует обратить внимание на событие  $\sup_{t \in T} X(t) \geq x_0$ , а также на момент времени  $t$ , при котором процесс впервые достигнет уровня  $x_0$ . Но для того, чтобы вычислять вероятности таких событий, следует ввести понятие распределения вероятностей на измеримом пространстве траекторий процесса.

Пространство траекторий трактуется как прямое произведение

$$\mathcal{X} = \prod_{t \in T} \mathcal{X}_t$$

пространств значений процесса в каждой точке  $t \in T$ . Подмножества этого пространства, определяемые ограничениями вида

$$a_1 < X(t_1) < b_1, \dots, a_n < X(t_n) < b_n$$

при любом конечном  $n$ , называются *прямоугольниками*. Конечные объединения всевозможных непересекающихся прямоугольников (изменяются как значения  $n$ , так и наборы точек  $t_1, \dots, t_n$  из  $T$ ) образуют, очевидно, булеву алгебру  $\mathcal{A}$ . Наименьшая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$ , содержащая  $\mathcal{A}$ , является искомой  $\sigma$ -алгеброй на пространстве траекторий  $\mathcal{X}$ .

Таким образом, мы имеем измеримое пространство  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ ,  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$  которого порождается полуалгеброй прямоугольников, и естественно ожидать, что задание совместных функций распределения

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n)$$



случайных величин  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  при любых  $n = 1, 2, \dots$  и любых наборах  $t_1, \dots, t_n$  однозначно определяют вероятность на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ . То, что это действительно так, устанавливает знаменитая теорема А.Н. Колмогорова, положившая начало строгой математической теории случайных процессов. Заметим только, что в этой теореме накладывается естественное условие *согласованности* функций распределения: маргинальные функции распределения, соответствующие части  $T_k = (t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ ,  $k < n$ , набора индексов  $t_1, \dots, t_n$ , должны совпадать с теми, что были построены для набора  $T_k$ . Впрочем, это условие соблюдается “автоматически,” поскольку построение функций распределения производится при произвольных значениях ее аргументов.

Следующие два примера, играющие важную роль в практических приложениях теории случайных процессов, иллюстрируют общую методологию и технические приемы, используемые при построении вероятностных моделей случайных процессов.

### Пуассоновский процесс

На временной оси  $T = \mathbb{R}_+$  в случайные моменты времени появляются некоторые события (см. пример 15.1), и наблюдается траектория  $x(t)$  точечного случайного процесса  $X(t)$ , регистрирующая число событий, появившихся к моменту времени  $t$ . Следующие три постулата выделяют пуассоновский процесс из класса всевозможных точечных процессов.

(P1) *Стационарность*. Распределение числа событий, появившихся во временном промежутке  $[t_1, t_2]$ , зависит только от длины  $t_2 - t_1$  этого промежутка, то есть

$$P(X(t_2) - X(t_1) = x) = p_x(t_2 - t_1).$$

(P2) *Независимость приращений*. Для любого упорядоченного набора моментов времени  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  случайные величины  $X(t_k) - X(t_{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $X(t_0) = X(0) = 0$ , независимы в совокупности.

(P3) *Ординарность* или *разреженность*. Вероятность  $p_x(\Delta t) = P(X(t + \Delta t) - X(t) = x)$  того, что за промежуток времени  $\Delta t$  произойдет ровно  $x$  ( $= 0, 1, \dots$ ) событий допускает при  $\Delta t \rightarrow 0$  асимптотическое представление

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t); \quad p_x(\Delta t) = o(\Delta t), \quad x \geq 2, .$$

В этом представлении  $\lambda > 0$  – числовой параметр, называемый обычно *интенсивностью* пуассоновского потока событий (см. в связи с этим модель пуассоновского распределения в §5).

Используя постулаты (P1)–(P3), построим конечномерные распределения

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n)$$

пуассоновского процесса. Эти построения значительно облегчает

**Лемма 15.1.** *Функция  $p_x(t) = P(X(t) = x)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x = 0, 1, \dots$ , однозначно определяет все конечномерные распределения пуассоновского процесса.*

*Доказательство.* Следующая цепочка равенств, в которой сначала используется постулат (P2), а потом – (P1), устанавливает соотношение между конечномерной плотностью процесса  $f_{t_1, \dots, t_n}$  и функцией  $p_x(t)$ :

$$\begin{aligned} f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X(t_1) = x_1, \\ &X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1, \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}) = \\ &\prod_{k=1}^n P(X(t_k) - X(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}) = \\ &\prod_{k=1}^n P(X(t_k - t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}) = \\ &\prod_{k=1}^n p_{x_k - x_{k-1}}(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Естественно, все эти выкладки имеют смысл лишь при  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ .

Вид функции  $p_x(t)$ , а вместе с ним и конечномерные распределения процесса Пуассона, устанавливает

**Теорема 15.1.** *Если справедливы постулаты (P1)–(P3), то*

$$p_x(t) = P(X(t) = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad t \geq 0, \quad x = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Доказательство. Покажем сначала, что (1) выполняется в случае  $x = 0$ , для чего исследуем асимптотику при  $\Delta t \rightarrow 0$  функции  $p_0(t + \Delta t) = P(X(t + \Delta t) = 0)$ .

Событие  $X(t + \Delta t) = 0$  эквивалентно одновременному осуществлению двух независимых (в силу постулата (P2)) событий:  $X(t) = 0$  и  $X(t + \Delta t) - X(t) = 0$ . Используя постулаты (P1) и (P3), находим, что

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= P(X(t) = 0) \cdot P(X(t + \Delta t) - X(t) = 0) = \\ &= p_0(t) \cdot p_0(\Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)). \end{aligned}$$

Если полученное асимптотическое представление записать в виде

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + o(1)$$

и устремить  $\Delta t$  к нулю, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

с очевидным начальным условием  $p_0(0) = 1$ . Это уравнение с разделяющимися переменными, решение которого с учетом начальных условий

$$p_0(t) = e^{-\lambda t},$$

что совпадает с (1) при  $x = 0$ .

Проведем аналогичные построения для произвольного целого  $x \geq 1$ , для чего представим событие  $X(t + \Delta t) = x$  в виде объединения  $x + 1$  несовместных событий  $\{X(t) = x - k\} \cap \{X(t + \Delta t) - X(t) = k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, x$ . Используя, как и выше, постулаты (P1)–(P3), получаем

$$\begin{aligned} p_x(t + \Delta t) &= P(X(t + \Delta t) = x) = \\ &= \sum_{k=0}^x P(X(t) = x - k, X(t + \Delta t) - X(t) = k) = \\ &= \sum_{k=0}^x P(X(t) = x - k) \cdot P(X(t + \Delta t) - X(t) = k) = \\ &= \sum_{k=0}^x p_{x-k}(t) \cdot p_k(\Delta t) = p_x(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_{x-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Если представить полученное соотношение в виде

$$\frac{p_x(t + \Delta t) - p_x(t)}{\Delta t} = -\lambda(p_x(t) - p_{x-1}(t)) + o(1)$$

и устремить  $\Delta t$  к нулю, то получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -\lambda(p_x(t) - p_{x-1}(t)), \quad p_x(0) = 0, \quad x = 1, 2, \dots$$

Поскольку выше мы определили  $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ , то для  $p_1(t)$  имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda(p_1(t) - e^{-\lambda t}), \quad p_1(0) = 0,$$

решение которого стандартными методами дает

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t},$$

что опять совпадает с (1) при  $x = 1$ .

Дальнейшее построение модели осуществляется по индукции. Предполагается, что (1) справедливо для некоторого  $x \geq 2$ , и решается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_{x+1}(t)}{dt} = -\lambda \left( p_{x+1}(t) - \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \right), \quad p_{x+1}(0) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что решение этого уравнения с учетом начального условия определяется формулой (1) с заменой  $x$  на  $x + 1$ . Таким образом, построение вероятностной модели пуассоновского процесса завершено.

Интересно заметить, что формула (1) при  $t = 1$  дает функцию плотности распределения Пуассона  $P(\lambda)$ , так что (1) можно трактовать как обобщение теоремы сложения для распределения Пуассона на случай “дробного” числа слагаемых, по существу же происходит простое суммирование числа событий по всем  $t$  единицам времени.

## Лекция 24

Изучим некоторые свойства процесса Пуассона, которые вскрывают интересные связи распределения Пуассона  $P(\lambda)$  с показательным, равномерным и гамма-распределениями. Начнем с выяснения вида распределения промежутков времени между появлениями событий в процессе Пуассона.

**Предложение 15.1.** *Случайные величины  $\tau_1, \dots, \tau_n$ , реализации которых указывают промежутки времени между появлениями событий в процессе Пуассона, независимы и одинаково распределены по показательному закону  $E(\lambda^{-1})$ .*

*Доказательство.* Требуется показать, что совместная функция плотности случайных величин  $\tau_1, \dots, \tau_n$

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \sum_1^n t_k \right\}, \quad (2)$$

в области  $t_{[1]} = \min\{t_1, \dots, t_n\} > 0$ .

Выберем  $\Delta t < t_{[1]}$  и подсчитаем вероятность того, что в каждом из промежутков  $[T_k, T_k + \Delta t)$ , где  $T_k = t_1 + \dots + t_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , произошло только по одному событию, в то время как в промежутках  $[0, t_1)$  и  $[T_k + \Delta t, T_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , событий не было. Очевидно, при  $\Delta t \rightarrow 0$  асимптотика этой вероятности должна иметь вид  $f_n(t_1, \dots, t_n)(\Delta t)^n$ , и это обстоятельство позволит нам получить искомую функцию плотности  $f_n$ .

В силу постулата (P2) независимости приращений все из рассматриваемых  $2n$  событий о появлении по одному или полному отсутствию инцидентов в указанных временных промежутках являются независимыми; вероятность появления ровно одного события в каждом из промежутков  $[T_k, T_k + \Delta t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , равна (постулат (P1))  $p_1(\Delta t)$ , а вероятности отсутствия событий в промежутках  $[0, t_1)$  и  $[T_k + \Delta t, T_{k+1})$  равны соответственно  $p_0(t_1)$  и  $p_0(t_{k+1} - \Delta t)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Таким образом, вероятность совместного осуществления всех  $2n$  событий в терминах функции  $p_x(t)$  равна

$$p_0(t_1)p_1^n(\Delta t) \prod_1^{n-1} p_0(t_{k+1} - \Delta t). \quad (3)$$

Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то применение формулы (1) дает

$$p_0(t_1) = \exp\{-\lambda t_1\}, \quad p_1^n(\Delta t) = \lambda^n \exp\{-n\lambda\Delta t\}(\Delta t)^n \sim \lambda^n(\Delta t)^n,$$

$$p_0(t_{k+1} - \Delta t) = \exp\{-\lambda t_{k+1} + \lambda\Delta t\} \sim \exp\{-\lambda t_{k+1}\}.$$

Подставляя полученные асимптотики в (3), получаем с точностью до множителя  $(\Delta t)^n$  правую часть (2).

Доказанное предложение позволяет нам достаточно просто установить распределение случайной величины  $\tau$ , реализация которой соответствует

моменту первого достижения пуассоновским процессом заданного уровня  $h$ .

**Следствие 15.1.** *Случайная величина  $\tau$  имеет гамма-распределение  $G(m, \lambda^{-1})$ , где параметр формы  $m$  принимает целочисленное значение, равное  $h$ , если  $h$  целое, и равное  $[h] + 1$ , если  $h$  дробное.*

*Доказательство.* немедленно вытекает из результата предложения 15.1, поскольку

$$\tau = \sum_{k=1}^m \tau_k,$$

где  $\tau_1, \dots, \tau_m$  независимы и одинаково распределены в соответствии с показательным распределением  $E(\lambda^{-1})$  (напомним, что именно таким образом вводилось гамма-распределение в §12).

Установленная связь гамма-распределения с пуассоновским потоком событий открывает новую область приложений этого распределения. Это – *вероятностные модели износа и старения*. Простейший пример построения такой модели дает исследование процесса износа протектора автомобильной шины. Резонно считать, что различного рода препятствия, возникающие на пути движения автомобиля и приводящие к резкому торможению, реализуют пуассоновский поток событий. Каждое резкое торможение приводит к уменьшению глубины  $r$  протектора на определенную (предположим, для простоты, – одинаковую) величину  $\Delta r$ . В таком случае “облысение” шин наступит после  $m$  торможений, где  $m$  в соответствии со следствием 15.1 определяется уровнем  $h = r/\Delta r$ .

Еще одно замечательное свойство пуассоновского процесса, характеризующее особого рода случайность в потоке событий, состоит в следующей специфике условного распределения моментов появления фиксированного числа  $n$  событий на фиксированном промежутке времени  $[0, T]$ . Точная формулировка этого свойства осуществляется в терминах специального случайного вектора, играющего важную роль в математической статистике.

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – случайный вектор, заданный на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{A})$ , с независимыми одинаково распределенными с плотностью  $f(x)$  по мере Лебега компонентами. Вектор  $X_{[1]}, \dots, X_{[n]}$ , полученный из исходного вектора упорядочиванием его компонент при каждом фиксированном  $\omega \in \Omega$ , называется *вариационным рядом*. Таким образом, при

каждом фиксированном  $\omega \in \Omega$  компоненты вариационного ряда удовлетворяют неравенствам  $X_{[1]}(\omega) \leq \dots \leq X_{[n]}(\omega)$ , и если  $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_n = X_n(\omega)$ , то  $x_{[1]} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ ,

$x_{[2]}$  равен второму по величине значению среди  $x_1, \dots, x_n$ ,  $x_{[3]}$  – третьему и т.д., так что реализация (при элементарном исходе  $\omega$ ) последней компоненты вариационного ряда  $x_{[n]} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Функция плотности исходного вектора  $X_1, \dots, X_n$  с независимыми, одинаково непрерывно распределенными компонентами равна

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k),$$

а функция плотности вариационного ряда отлична от нуля только в области  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  и равна  $g_n(x_1, \dots, x_n) = n! f_n(x_1, \dots, x_n)$ . Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно применить метод, который использовался при доказательстве последнего предложения.

Для каждого фиксированного ряда  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  аргументов функции плотности  $g_n(\cdot)$  и  $\Delta x < \min_{1 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$  вычислим вероятность события  $A$ , состоящего в том, что одна из компонент исходного вектора  $X_1, \dots, X_n$  попадет в интервал  $[x_1, x_1 + \Delta x)$  (событие  $A_1$ ), другая, из оставшихся  $n - 1$  компонент, в интервал  $[x_2, x_2 + \Delta x)$  (событие  $A_2$ ), и т.д., так что последняя из оставшихся компонент должна попасть в интервал  $[x_n, x_n + \Delta x)$  (событие  $A_n$ ). В силу независимости компонент события  $A_1, \dots, A_n$  независимы, и поэтому

$$P(A) = P\left(\bigcap_1^n A_k\right) = \prod_1^n P(A_k).$$

Если  $F(x)$  – функция распределения, соответствующая плотности  $f(x)$ , то вероятность события  $A_1$  равна  $n [F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)]$ , поскольку у каждой компоненты вероятность попасть в указанный интервал  $[x_1, x_1 + \Delta x)$  одна и та же и равна разности значений функции распределения на концах интервала, а само событие  $A_1$  состоит из  $n$  несовместных событий попадания соответствующих компонент в этот интервал. Вероятность события  $A_2$ , состоящего из  $n - 1$  несовместных событий попадания одной из оставшихся компонент случайного вектора в интервал  $[x_2, x_2 + \Delta x)$ , в силу тех же доводов равна  $(n - 1) [F(x_2 + \Delta x) - F(x_2)]$ . Продолжая в том же духе, придем к последнему событию  $A_n$ , вероятность которого равна  $F(x_n + \Delta x) - F(x_n)$ .

Перемножая эти вероятности, получаем

$$P(A) = n! \prod_{k=1}^n [F(x_k + \Delta x) - F(x_k)],$$

что при  $\Delta x \rightarrow 0$  эквивалентно  $n! f_n(x_1, \dots, x_n) (\Delta x)^n$ , так что множитель перед  $(\Delta x)^n$  дает искомую функцию плотности  $g_n(x_1, \dots, x_n)$  вариационного ряда.

В частности, функция плотности вариационного ряда равномерного на интервале  $[0, T]$  распределения

$$g_n(x_1, \dots, x_n) = n! T^{-n}, \quad 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq T. \quad (4)$$

Теперь сформулируем обещанное свойство пуассоновского процесса.

**Предложение 15.2.** *Совместное распределение моментов  $\tau_1, \dots, \dots, \tau_n$  появления  $n$  событий на интервале  $[0, T]$  пуассоновского процесса при условии, что в этом интервале появилось ровно  $n$  событий, совпадает с распределением вариационного ряда равномерного на интервале  $[0, T]$  распределения.*

*Доказательство.* Снова используем метод асимптотического представления функции плотности. Выберем на интервале  $[0, T]$  упорядоченный ряд из  $n$  точек  $0 < t_1 < \dots < t_n < T$ , а также выберем  $\Delta t$ , меньшее любого из промежутков, ограниченных точками  $t_1, \dots, t_n$ . Пусть  $A = B_0 \cap_1^n (A_k B_k)$  – событие, состоящее в том, что в каждом из интервалов  $[t_k, t_k + \Delta t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , появится ровно по одному пуассоновскому событию (эти пуассоновские события обозначаются  $A_k$ ), а в интервалах  $[0, t_1)$ ,  $[t_k + \Delta t, t_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ ,  $[t_n + \Delta t, T]$  пуассоновских событий не было (эти “подсобытия” обозначаются  $B_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ ). Событие, состоящее в том, что на интервале  $[0, T]$  появилось ровно  $n$  пуассоновских событий (условие) обозначим  $B$ . В этих обозначениях доказательство предложения состоит в выводе следующей асимптотической формулы (см. формулу (4)):  $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B) = n! T^{-n}$ .

Повторяя рассуждения, которые мы проводили при доказательстве предложения 15.1 при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем

$$P(A \cap B) = (\lambda \Delta t)^n \exp \left\{ -\lambda \left[ n \Delta t + t_1 + \sum_1^{n-1} (t_{k+1} - t_k - \Delta t) + T - t_n - \Delta t \right] \right\} \sim$$



$$\lambda^n \exp \left\{ -\lambda \left[ t_1 + \sum_1^{n-1} (t_{k+1} - t_k) + T - t_n \right] \right\} (\Delta t)^n = \lambda^n e^{-\lambda T} (\Delta t)^n.$$

Поскольку вероятность появления ровно  $n$  событий в промежутке  $[0, T]$  равна  $P(B) = (\lambda T)^n e^{-\lambda T} / n!$ , то

$$g_n(t_1, \dots, t_n) (\Delta t)^n \sim P(A \cap B) / P(B) \sim n! T^{-n}.$$

Доказанное предложение проливает свет на феномен пуассоновости спорадического фона метеоров (см. пример 7 из §1). По-видимому, спорадические метеорные частицы равномерно заполняют пространство около орбиты Земли, и при ее движении мы наталкиваемся на отдельные частицы (пуассоновские события) так, что моменты этих столкновений выстраивают вариационный ряд равномерного распределения.

### Винеровский процесс

Вернемся к примеру 15.4 и рассмотрим броуновское движение на плоскости. Частица вещества помещается в начало декартовой системы координат  $(x, y)$  на плоскости, и траектория ее движения описывается кривой с параметрическим уравнением  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Нас интересуют конечномерные распределения двумерного процесса  $Z(t) = (X(t), Y(t))$ , для чего достаточно определить совместную функцию распределения

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) = P(X(t_1) < x_1, Y(t_1) < y_1, \dots, X(t_n) < x_n, Y(t_n) < y_n).$$

Мы начнем с очевидного условия независимости и одинаковой распределенности компонент  $X(t)$  и  $Y(t)$  процесса  $Z(t)$ . Хаотическое движение отдельных, не связанных друг с другом молекул толкает частицу в направлении оси  $OX$  вне зависимости от того, что делают другие молекулы, способствующие ее движению в направлении  $OY$ . Таким образом, броуновское движение на плоскости можно рассматривать как прямое произведение двух одномерных одинаково распределенных броуновских движений. Существует несколько моделей одномерного броуновского движения  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , из которых мы остановимся на простейшей, предложенной Н. Винером в начале XX века, и поэтому носящей название *винеровского процесса*.

Построение модели осуществляется по аналогии с выводом нормального распределения путем предельного перехода в биномиальном распределении при неограниченном возрастании числа испытаний Бернулли. Разобьем временную ось  $T = \mathbb{R}_+$  на малые интервалы одинаковой длины  $1/n$ , введем “дискретное время”  $t = k/n$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и будем предполагать, что частица движется “рывками” в эти моменты времени, передвигаясь с вероятностью  $1/2$  вправо на некоторую величину  $\alpha$  или, с той же вероятностью  $1/2$ , влево на такую же величину  $\alpha$ , которая не зависит от времени  $t$ . Такой дискретный случайный процесс  $X_n(t)$ ,  $t = k/n$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , траектория  $x_n(t)$  которого определяет положения частицы в капилляре в моменты времени  $t$ , можно представить в виде суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих всего два равных по модулю значения. Действительно, пусть  $X_1, X_2, \dots$  – бесконечная последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения  $+1$  или  $-1$  с одинаковой вероятностью  $1/2$ . Тогда

$$X_n(t) = \alpha \sum_{i=0}^{tn} X_i,$$

при любых  $t = k/n$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

Так как случайные величины  $X_n(t_1), \dots, X_n(t_m)$  однозначно определяются *приращениями*  $X_n(t_i) - X_n(t_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $t_0 = 0$ ,  $X_n(0) = 0$  процесса  $X_n(t)$  и эти приращения независимы в совокупности в силу независимости бинарных случайных величин  $X_1, X_2, \dots$ , а

$$X_n(t_i) - X_n(t_{i-1}) = \sum_{j=nt_{i-1}+1}^{nt_i} X_j,$$

то конечномерные распределения процесса с *независимыми приращениями*  $\{X_n(t), t \geq 0\}$  однозначно определяются распределениями случайной величины  $X_n(t)$  при каждом фиксированном значении  $t$ . Это есть следствие не только независимости бинарных случайных величин, но и того, что приращение  $X_n(t_i) - X_n(t_{i-1})$  имеет то же распределение, что и  $X_n(t_i - t_{i-1})$ . Поэтому, если  $f(x | t)$  – функция плотности  $X_n(t)$ , то функция плотности конечномерных распределений процесса равна

$$\prod_1^m f(x_i - x_{i-1} | t_i - t_{i-1}),$$

где, как и выше,  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ .

Не трудно понять, что мы затеяли всю эту игру с дискретным движением броуновской частицы только для того, чтобы потом перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , воспользовавшись центральной предельной теоремой. Но в таком случае необходимо нормировать  $\sum_1^n X_i$ . Так как  $\mathbf{E}X_i = 0$ , а  $\mathbf{D}X_i = 1$ , то условие невырождаемости процесса  $X_n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  состоит в выборе  $\alpha$  пропорциональным  $1/\sqrt{n}$ . В связи с этим вводят параметр  $\sigma^2$ , который называют *коэффициентом диффузии* (он характеризует скорость движения частицы), и полагают  $\alpha = \sigma/\sqrt{n}$ . При таком выборе  $\alpha$  мы получаем дискретный случайный процесс

$$X_n(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_0^{tn} X_i.$$

В силу центральной предельной теоремы при каждом фиксированном значении  $t$  случайная величина  $X_n(t)$  сходится слабо к случайной величине с нормальным  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$  распределением. Используя теперь представление конечномерных распределений через распределения приращений, мы можем дать следующее определение винеровского процесса.

**Определение 15.1.** Случайный процесс  $\{X(t), t \geq 0\}$ , у которого функция плотности конечномерного распределения определяется формулой

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \sigma^n \prod_1^n (t_i - t_{i-1})^{-1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(t_i - t_{i-1})} \right\},$$

называется *винеровским случайным процессом*.

## Лекция 25

Как и в случае пуассоновского процесса, для практических приложений несомненный интерес представляет распределение случайной величины  $\tau = \inf\{t : X(t) \geq h\}$ , реализация которой соответствует моменту первого достижения винеровским процессом уровня  $h > 0$ . К сожалению, для винеровского процесса техника вывода распределений функционалов

от траекторий процесса достаточно сложна, и для овладения этой техникой требуется специальный аппарат, во многом выходящий за рамки общего курса теории вероятностей. Однако, что касается дискретного аналога винеровского процесса, который мы рассматривали до определения 15.1, то здесь распределение “первого перескока” можно получить, используя несложную технику комбинаторных выкладок.

Рассмотрим, как и выше, последовательность независимых случайных величин  $\{X_i, i \geq 1\}$ , принимающих всего два значения  $+1$  и  $-1$  с одинаковыми вероятностями  $1/2$ . Введем дискретный случайный процесс

$$S(t) = \sum_{i=0}^t X_i, \quad t = 0, 1, \dots; \quad S(0) = 0$$

(для наглядности можно соединить последовательно точки  $(t, s(t))$  траектории  $s(t)$ ,  $t = 0, 1, \dots$  процесса  $S(t)$ , представив траекторию в виде ломаной линии). Напомним, что дискретный аналог  $X_n(t)$  винеровского процесса  $X(t)$  получается из процесса  $S(t)$  заменой  $t$  на  $tn$  с  $t = k/n$  и последующим масштабированием его траектории:  $X_n(t) = S(tn)\sigma/\sqrt{n}$ .

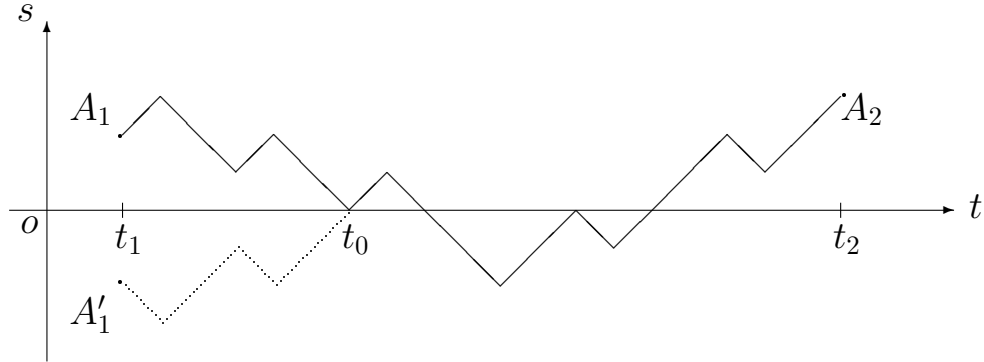
Рассмотрим все траектории, проходящие через две заданные точки  $A_1 = (t_1, s_1 = s(t_1))$  и  $A_2 = (t_2, s_2 = s(t_2))$ ,  $t_1 < t_2$ , и назовем участок траектории между этими точками *путем из точки  $A_1$  в точку  $A_2$* . Эти пути обладают тем замечательным свойством, что у них число  $p$  слагаемых  $X_i$ ,  $i = t_1 + 1, \dots, t_2$ , принявших значение  $+1$ , одинаково и равно  $(t_2 - t_1 + s_2 - s_1)/2$ , если, конечно, последнее число целое, – в противном случае не существует траектории, проходящей через эти точки. Действительно, если обозначить  $q$  число отрицательных ( $-1$ ) слагаемых, то  $p + q = t_2 - t_1$  и  $p - q = s_2 - s_1$ , что и дает указанную формулу для расчета  $p$ . Из этих же соотношений легко получить формулу для общего числа  $N$  путей, проходящих через точки  $A_1$  и  $A_2$ ; очевидно,  $N = C_{p+q}^p = C_{p+q}^q$ .

Следующие две леммы указывают простой метод для расчета числа путей из начала координат в точку  $(k, m)$ , которые расположены ниже уровня  $m$ .

**Лемма 15.2** (*принцип отражения*). Число путей из точки  $A_1 = (t_1, s_1)$ ,  $s_1 > 0$ , в точку  $A_2 = (t_2, s_2)$ ,  $s_2 > 0$ , которые касаются или пересекают ось  $t$  хотя бы один раз, равно числу всевозможных путей из точки  $A'_1 = (t_1, -s_1)$  в точку  $A_2$ .

*Доказательство.* Между множеством путей из  $A_1$  в  $A_2$ , удовлетво-

ряющих условию леммы, и множеством всевозможных путей из  $A'_1$  в  $A_2$  можно установить взаимно однозначное соответствие, используя следующий *принцип отражения* (см. рисунок).



Путь из  $A_1$  в  $A_2$  должен по крайней мере один раз коснуться оси времени  $t$ ; пусть  $t_0 > t_1$  – абсцисса первого касания (напомним,  $s_1 = s(t_1) > 0$ ). Такому пути с ординатами

$$s(t_1) > 0, s(t_1 + 1) > 0, \dots, s(t_0 - 1) > 0, s(t_0) = 0, \\ s(t_0 + 1), \dots, s(t_2)$$

сопоставим путь с ординатами

$$-s(t_1) < 0, -s(t_1 + 1) < 0, \dots, -s(t_0 - 1) < 0, s(t_0) = 0, \\ s(t_0 + 1), \dots, s(t_2),$$

который принадлежит второму множеству, то есть отразим участок пути из  $A_1$  в  $A_2$  на промежутке  $[t_1, t_0]$  зеркально относительно оси  $t$ , а дальше оставим путь без изменения. Легко убедиться, что это взаимно однозначное соответствие – каждому пути второго множества отвечает такой же “зеркальный” образ из первого множества, ибо пути из второго множества обязательно пересекают ось  $t$ , так как  $-s(t_1) < 0$ , а  $s(t_2) > 0$ . Таким образом, оба множества содержат одинаковое число путей.

Рассмотрим теперь пути из начала координат  $(0, 0)$  в точку  $(k, m)$  с  $0 < m \leq k$ . Общее число таких путей, как было показано выше,  $N_{k,m} = C_k^p$ , где  $p = (m + k)/2$ , если оно целое, в противном случае  $N_{k,m} = 0$ .

**Лемма 15.3.** Число путей из начала координат в точку  $(k, m)$ ,  $0 < m \leq k$ , у которых  $s(t) > 0$  при всех  $t = 1, 2, \dots, k$ , равно

$$N_{k-1,m-1} - N_{k-1,m+1} = \frac{m}{k} N_{k,m}.$$

**Доказательство.** Любой путь из  $(0, 0)$  в  $(k, m)$ , удовлетворяющий условию леммы, проходит через точку  $(1, 1)$ . Следовательно, если вычтуть из общего числа путей  $N_{k-1, m-1}$  из точки  $(1, 1)$  в точку  $(k, m)$  число  $M$  путей, которые соединяют эти точки, касаясь или пересекая ось  $t$ , то получим искомое число путей из  $(0, 0)$  в  $(k, m)$ , лежащих в первом квадранте. В силу леммы 15.2  $M$  равно общему числу путей из точки  $(1, -1)$  в точку  $(k, m)$ , поэтому  $M = N_{k-1, m+1}$ .

**Лемма 15.4.** Число путей из начала координат в точку  $(k, m)$ ,  $0 < m \leq k$ , у которых  $s(t) < m$  при всех  $t = 1, 2, \dots, k-1$ , равно

$$N_{k-1, m-1} - N_{k-1, m+1} = \frac{m}{k} N_{k, m}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Достаточно поместить начало координат в точку  $(k, m)$  и трактовать уровень  $m$  как ось абсцисс. Используя формулу для расчета  $N$ , которая была получена в лемме 15.3, получаем (5).

Последняя лемма устанавливает распределение момента  $\kappa = \min\{t : S(t) \geq m\}$  первого выхода на уровень  $m$  дискретного процесса  $S(t) = \sum_1^t X_i$ ,  $t = 0, 1, \dots$ . Действительно, формула (5) вычисляет количество траекторий определенного вида, связанного с их положением в момент  $t = k$ . Мы можем сгруппировать бесконечное множество траекторий процесса  $S(t)$  в  $2^k$  равновероятных класса в соответствии с различиями в путях, соединяющих начало координат с достижимыми точками, абсцисса которых равна  $k$ . Это равносильно к переходу к другому вероятностному пространству, где  $\Omega$  состоит из  $2^k$  равновероятных точек, и нас интересует вероятность события, состоящего из  $mN_{k, m}/k$  элементарных исходов, так что справедлива

**Лемма 15.5.** Вероятность того, что дискретный процесс  $S(t)$  впервые достигнет уровня  $m$  в момент времени  $t = k$  равна

$$\frac{m}{2^k k} N_{k, m} = \frac{m}{2^k k} C_k^{(k+m)/2},$$

где  $k$  и  $m$  должны иметь одинаковую четность,  $m \leq k$ .

Теперь обратимся к дискретному аналогу  $X_n(t)$  винеровского процесса  $X(t)$  и моменту  $\tau_n = \min\{t : X_n(t) \geq h\}$  первого выхода процесса  $X_n(t)$  на уровень  $h > 0$ . Перепишем определение  $\tau_n$  в терминах момента  $\kappa$  :

$$\frac{\kappa}{n} = \min \left\{ t : \frac{\sigma}{\sqrt{n}} S(nt) \geq \frac{m\sigma}{\sqrt{n}} \right\},$$

где  $m = h\sqrt{n}/\sigma$ . Из этой записи видно, что функция плотности случайной величины  $\tau_n$

$$g_n(t) = P(\tau_n = t) = \frac{m}{2^k k} C_k^{(k+m)/2},$$

где  $k = nt$  с очевидными ограничениями на возможные значения переменной  $t$  и параметров  $h$  и  $\sigma$ .

Изучим асимптотическое поведение  $g_n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $h$ . Легко понять, что тем самым мы устанавливаем асимптотическое поведение вероятности

$$G(t + 1/n) - G(t) = P(t \leq \tau < t + 1/n) \sim g(t) \frac{1}{n}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , и это позволит нам найти функцию плотности  $g(t)$  момента  $\tau$  первого достижения уровня  $h$  винеровским процессом  $X(t)$ .

**Предложение 15.3.** Если  $n \rightarrow \infty$ , то

$$g_n(t) \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi}\sigma t^{3/2}n} \exp\left\{-\frac{h^2}{2\sigma^2 t}\right\}.$$

**Доказательство.** Нам предстоит исследовать асимптотику выражения

$$\frac{m}{2^k k} \frac{k!}{\left(\frac{k+m}{2}\right)! \left(\frac{k-m}{2}\right)!},$$

в котором  $k = nt$ ,  $m = h\sqrt{n}/\sigma$  и  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку  $k$ ,  $k + m$  и  $k - m$  с ростом  $n$  стремятся к бесконечности, то, как мы это делали раньше при доказательстве теоремы Муавра–Лапласа, воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n} (1 + O(1/n))$$

и представим функцию плотности в асимптотическом виде

$$g_n(t) \sim \frac{m}{2^k k \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{k^{k+1/2} e^{-k} 2^{(k+m)/2+1/2+(k-m)/2+1/2}}{(k+m)^{(k+m)/2+1/2} (k-m)^{(k-m)/2+1/2} e^{-(k+m)/2} e^{-(k-m)/2}} =$$

$$\frac{m}{\sqrt{2\pi} k^{3/2}} \left(1 + \frac{m}{k}\right)^{-\frac{k+m}{2}-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{m}{k}\right)^{-\frac{k-m}{2}-\frac{1}{2}}$$

Поскольку  $m/k \rightarrow 0$ , то степени  $1/2$  не влияют на асимптотику, и простые алгебраические преобразования дают

$$g_n(t) \sim \frac{m}{\sqrt{2\pi}k^{3/2}} \left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right)^{-\frac{k}{2}} \left(1 + \frac{m}{k}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(1 - \frac{m}{k}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Если теперь подставить в правую часть  $m = h\sqrt{n}/\sigma$ ,  $k = nt$  и воспользоваться замечательным пределом, определяющим число  $e$ , то получим окончательный результат

$$g_n(t) \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi}\sigma t^{3/2}n} \exp\left\{-\frac{h^2}{2t\sigma^2}\right\}.$$

Итак, мы установили, что  $\tau_n \Rightarrow \tau$ , функция плотности которого имеет вид

$$g(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}, \quad a = h/\sigma,$$

а функция распределения  $G(t)$  выражается через функцию распределения  $\Phi(\cdot)$  стандартного нормального закона  $\mathcal{N}(0, 1)$  соотношением

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2x}\right\} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Однако, это совсем не означает, что мы получили функцию распределения момента первого перескока винеровским процессом заданного уровня. В нашем доказательстве имеется огромная “дыра” – мы не располагаем условиями, при которых сходимость последовательности конечномерных распределений процесса (слабая сходимость) влечет сходимость распределений функционалов от этого процесса. К счастью, в нашем случае с дискретным аналогом винеровского процесса все обстоит благополучно.

Следует отметить, что распределение первого перескока играет важную роль в моделях теории надежности, когда отказ системы вызывается усталостными разрушениями, вызванными хаотическими появлениями “пиковых” нагрузок, которые возникают во времени подобно локальным максимумам траектории винеровского процесса.



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики.– М.: Наука, 1983.
2. Боровков А.А. Математическая статистика.– М.: Наука, 1984.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей.– М.: Наука, 1986.
4. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику.– М.: Изд-во МГУ, 1987.
5. Крамер Г. Математические методы статистики.– М.: Мир, 1975.
6. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей.– М.: Наука, 1982.
7. Ширяев А.Н. Вероятность.– М.: Наука, 1980.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
<i>часть первая</i>	
теория вероятностей	
§1 Элементарная теория вероятностей	5
§2 Вероятностное пространство	18
§3 Условная вероятность и независимость событий	26
§4 Случайные величины и функции распределения	38
§5 Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения	45
§6 Характеристики распределения случайной величины. Классификация распределений	54
§7 Предельные теоремы в схеме испытаний Бернулли. Нормальное распределение	72
§8 Векторные случайные величины. Независимость.	81
§9 Моментные характеристики многомерных нормальных распределений. Мультиномиальное и многомерное нормальное распределения	91
§10 Условное распределение вероятностей. Условное математическое ожидание	100
§11 Сходимость случайных величин и функций распределений	107
§12 Характеристические функции. Теоремы единственности.	114
§13 Характеристические функции. Критерий слабой сходимости	126
§14 Предельные теоремы теории вероятностей	135
§15 Случайные процессы	143
Литература	263